计算数学丛书

曲线曲面的数值表示和逼近

黄友谦编著　上海科学技术出版社

计算数学丛书

曲线曲面的数值表示和逼近

黄友谦 编著



上海科学技术出版社

计算数学丛书
曲线曲面的数值表示和逼近
黄友谦 编著
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6.125 字数 133,000
1984 年 9 月第 1 版 1984 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—10,200
统一书号：13119·1166 定价：0.71 元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

前　言

本书从几个侧面论述曲线、曲面拟合的数值方法，书中指出了单位算子逼近的应用，探讨了自适应的曲线拟合同常微分方程反解的联系，分析了带不等式约束的样条函数插值法，构造并评述了各种局部逼近的数值方法，讨论了分片伯恩斯坦多项式在保形逼近中的应用，最后，侧重介绍了散乱数据的曲面拟合方法。

作者从李岳生教授领导的讨论班中得到许多有益的启示．陈大正、关履泰、林锐豪同志分别参加了第三、二、四等章一些内容的讨论和协助个别内容的编写工作．作者对潘震泰、陈大正、程诗杰同志表示感谢，他们曾将本书选作高年级的选修课，提出了一些建议和修改意见。

由于水平限制，书中的错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

1981年10月

目　　录

第 1 章

引　论

§1　单位算子的逼近及应用

函数线性空间 X 的单位算子 I，是指对于任意 $f\in X$ 恒有 $If=f$. 记 $D=\frac{d}{dx}$ 称为微分算子，$\int$ 为积分算子，有 $I=D\int$，用步长 h 的中心差分算子 $\frac{\delta}{h}$ 来代替 D，这里

$$\delta f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right),$$

便得到单位算子的逼近算子 $\frac{\delta}{h}\int$，称为平均算子或磨光算子. 为了研究逼近误差，我们借助符号算子. 早在十九世纪前半期，一些数学家就曾经运用符号算子去解决一些数学问题. 符号算子方法就是通过简捷运算发现一些有用的数值方法. 至于这些数值方法的有效性和误差估计等仍按分析学的严格理论去阐明.

将 $f(x+h)$ 在 x 点作泰勒展开

$$f(x+h)=\left(I+hD+\frac{(hD)^2}{2!}+\cdots\right)f(x),$$

注意到 e^x 的泰勒级数形式，记

$$e^{hD}=I+hD+\frac{(hD)^2}{2!}+\cdots,$$

便有 $\delta f(x)=(e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}})f(x)=2\left(\operatorname{sh}\frac{hD}{2}\right)f(x)$. 再注意

到积分是微分的逆运算，将$\int$记成D^{-1}，我们得到磨光算子逼近单位算子的误差

$$I-\frac{\delta}{h}\int=I-\frac{2D^{-1}\mathrm{sh}\frac{h}{2}D}{h}$$
$$=I-\frac{2D^{-1}}{h}\left(\frac{hD}{2}+\frac{h^3D^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{h^5D^5}{2^5\cdot 5!}+\cdots\right)$$
$$=-\frac{h^2}{24}D^2-\frac{h^4}{1920}D^4-\cdots.$$

假定A是定义在线性空间X上的一个线性算子，$M\subset X$是一个线性集合，如果对于任意的$\varphi\in M$都有$A\varphi=\varphi$，我们便称算子A对M有再生性。如果$M=\mathrm{Span}\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$，则称$A$对$n-1$次多项式具有再生性，或称$A$具有$n-1$次代数精度。

由此可知，磨光算子对一次多项式有再生性。磨光算子有许多应用。取磨光算子去逼近单位算子可得到数值微分公式

$$f'(x)=If'(x)\approx\frac{\delta}{h}\int f'(x)dx=\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2},$$
$$f''(x)=I^2f''(x)\approx\left(\frac{\delta}{h}\int\right)^2f''(x)(dx)^2$$
$$=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

利用磨光算子去作用折线函数，便得到用于外形设计的形形式式的B样条曲线。

如果我们想提高磨光算子的精度，例如说，它对高次多项式也有再生性，一个简单办法是将$\delta=2\,\mathrm{sh}\,\frac{hD}{2}$写成

$$\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}^{-1}\frac{\delta}{2}=D$$

有 $I=D\int=\frac{2}{h}\left(\mathrm{sh}^{-1}\frac{\delta}{2}\right)\int$

$$=\frac{1}{h}\left(\delta-\frac{1^2}{2^2\cdot 3!}\delta^3+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 5!}\delta^5-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^6\cdot 7!}\delta^7+\cdots\right)\int,$$

试分别取 $I\approx\frac{\delta}{h}\int,$

$$I\approx\frac{1}{h}\left(\delta-\frac{1}{24}\delta^3\right)\int,$$

$$I\approx\frac{1}{h}\left(\delta-\frac{1}{24}\delta^3+\frac{3}{640}\delta^5\right)\int,$$

便得到对一次、三次、五次代数多项式有再生性的各种形式的磨光算子.

假定 A、B 都是定义在 X 上的线性算子，且对一切的 $\varphi\in X$ 都有 $A\varphi\in X$, $B\varphi\in X$. 定义算子 A、B 的布尔(Boole)和

$$A\oplus B=A+B-AB. \tag{1.1}$$

我们将 A、B 看成单位算子的逼近算子，注意到 $I^2=I$, $IA=A$, $IB=B$, 将单位算子 I^2 看成是单位长度 1 的正方形面积，A、B 分别看成是单位长度的逼近值，算子 A、B 及 $A\oplus B$ 逼近单位算子的误差，分别由图 1(a)、(b)、(c) 的斜线部分给出.

图 1(c) 表明，算子的布尔和 $A\oplus B$ 能更精确地逼近单位算子. 由单位算子的逼近，可得到各种曲线、曲面的表示方法. 事实上，设 $y=f(x)$ 是被逼近的曲线，注意到 $y=f(x)=If(x)$, 将单位算子代换成逼近算子 A, 便得到 $f(x)$ 的近似曲线 $y=\psi(x)=Af(x)$. 利用单位算子 I 的任意次幂都等于 I 的事实，可将算子 A 的再生函数类增大. 例如磨光算子 $\frac{\delta}{h}\int$

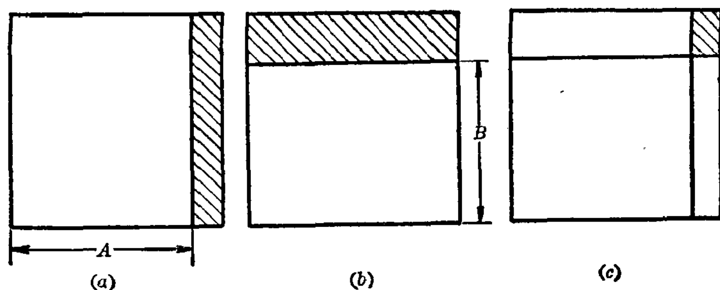


图 I

对一次多项式有再生性，利用 $\frac{\delta}{h}\int = I\frac{\delta}{h}\int$，将 I 分解为近似算子 $c_0+c_1\delta^2+c_2\delta^4$，决定常数 c_0，c_1，c_2 使算子

$$(c_0+c_1\delta^2+c_2\delta^4)\frac{\delta}{h}\int$$

对高次多项式有再生性．由待定系数法有

$$(c_0\delta+c_1\delta^3+c_2\delta^5)\int x^k dx = hx^k,$$

取 $k=0$ 解得 $c_0=1$．$k=1$ 时两端成为恒等式．$k=2$ 时求得 $c_2=-\frac{1}{24}$．当 $k=3$ 时对于取定的 $c_0=1$，$c_2=-\frac{1}{24}$，上式两端也成为恒等式．令 $k=4$ 解得 $c_2=\frac{3}{640}$，不难验明 $k=5$ 时上式两端仍成为恒等式，这即是说算子

$$\left(\delta-\frac{\delta^3}{24}+\frac{3\delta^5}{640}\right)\int$$

对五次多项式具有再生性．

算子的布尔和不但是构造康斯曲面的一个依据，而且在数值方法中能对近似解进行校正．仅举例说明如下．给定 n 个未知数的代数方程组

$$Ax=b, \quad A=(a_{ij})_{n\times n} \quad 且非奇异.$$

由于舍入误差影响，实际上，我们只能求得逆矩阵 A^{-1} 的近似矩阵 $\widetilde{A}^{-1}$，从而获得 x 的近似解

$$\widetilde{x}=\widetilde{A}^{-1}b.$$

将 $x-\widetilde{x}$ 记成 εx，ε 是 n 阶矩阵，称为误差阵，有

$$x=Ix=\widetilde{A}^{-1}Ax+\varepsilon x.$$

因此，近似求解的过程，可看成单位矩阵 I 作 $\widetilde{A}^{-1}A$ 逼近，然后令 $\widetilde{A}^{-1}Ax=\widetilde{A}^{-1}b$ 作为近似解. 现在，我们运用布尔和作解的校正，作 $\widetilde{A}^{-1}A$ 的自身布尔和

$$G_1=\widetilde{A}^{-1}A\oplus\widetilde{A}^{-1}A=\widetilde{A}^{-1}A(2I-\widetilde{A}^{-1}A)$$

并令 G_1x 为 $\widetilde{x}$ 的校正解，即

$$x^{(1)}=G_1x=G_1A^{-1}b=2\widetilde{x}-\widetilde{A}^{-1}A\widetilde{x},$$

可以预料 $x^{(1)}$ 比 $\widetilde{x}$ 更精确地逼近方程组的准确解 x. 用数值例子加以说明，假定

$$A=\begin{pmatrix}7.000 & 6.990\\ 4.000 & 4.000\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}34.97\\ 20.00\end{pmatrix}.$$

取

$$\widetilde{A}^{-1}=\begin{pmatrix}100.0 & -174.8\\ -100.0 & 175.0\end{pmatrix},$$

得 $\widetilde{x}=(1,\ 3)^T$. 但准确解 $x=(2,\ 3)^T$. 现作 $\widetilde{A}^{-1}A$ 的自身布尔和，并进一步求得 $x^{(1)}=(1.8,\ 3)^T$，这说明 $x^{(1)}$ 比 $\widetilde{x}$ 更接近 x. 如果作 $\widetilde{A}^{-1}A$ 的二次布尔和，即

$$G_2=\widetilde{A}^{-1}A\oplus\widetilde{A}^{-1}A\oplus\widetilde{A}^{-1}A,$$

并令 $\qquad x^{(2)}=G_2x=(3I-3\widetilde{A}^{-1}A+(\widetilde{A}^{-1}A)^2)\widetilde{x},$

那末 $\qquad x^{(2)}=(1.96,\ 3)^T,$

再作 $\widetilde{A}^{-1}A$ 的三次布尔和又有 $x^{(3)}=(1.992,\ 3)^T$ 等等.

§2 B样条的数值基础

B 样条是曲线、曲面数值表示的重要工具，其基本理论在文献[1]、[2]中有了详细论证，这里作一概述。为了书写方便，仅叙述非重节点的 B 样条函数。

假定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，$\{x_i\}$ 为 $[a,b]$ 中互异节点，称

$$[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k}]f = \frac{[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k-1}]f-[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}]f}{x_i-x_{i+k}}$$

为函数 $f(x)$ 在 $x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}$ 处的 k 阶差商。这里 $[x_j]f$ 表示 $f(x)$ 在 x_j 处的函数值。由代数插值的 Newton 形式，容易看出

$[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]f=f(x)$ 关于 $x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}$ 的 k 次代数插值的最高幂系数。

在寻找 $[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]f$ 与 $f^{(k)}$ 的联系中，利用 Peano 核定理，自然地导致发现 B 样条函数。假定

$$f(x)\in C^k[a,\ b],\ x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{i+k}$$

均属于 $[a,\ b]$，将 $f(x)$ 在 a 处作 Taylor 展开有

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a)+\int_a^b\frac{(x-t)_+^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)\,dt,$$

两边作关于 $x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}$ 的 k 阶差商，有

$$[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]f=\int_a^b[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}](\cdot-t)_+^{k-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}dt,$$

这里 $u_+=\max(0,\ u)$，注意到

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{(x_j - t)_+^{k-1}}{w_k'(x_j)},$$

$$w_k(x) = \prod_{l=i}^{i+k}(x - x_l),$$

当 $t \geqslant x_{i+k}$ 时 $(x_j - t)_+^{k-1} \equiv 0$; 当 $t \leqslant x_i$ 时

$$(x_j - t)_+^{k-1} \equiv (x_j - t)^{k-1},$$

进而

$$\begin{aligned}&[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1}\\ &\equiv [x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)^{k-1} \equiv 0,\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]f\\ &= \int_{x_i}^{x_{i+k}} [x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} dt.\end{aligned}$$

定义 1 称

$$B_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i)[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-1} \quad (2.1)$$

为具有结点 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 的 k 阶 B 样条.

这样, B 样条是将差商和导数联系起来的重要工具, 同一阶的差商、导数对应相同阶的 B 样条, 即有

$$[x_i, \cdots, x_{i+k}]f = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+k}} B_{i,k}(t) \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} dt. \quad (2.2)$$

从分析学看, k 阶 B 样条可看成 k 阶差商的 Peano 核函数, 从几何上看, B 样条是两个多面体的体积比.

引理 1 (Hermite-Gennochi 公式) 给定区间 $[a, b]$ 的一个分划 π: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 假定 $f(x) \in C^n[a, b]$, 则有

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n]f = \int_{S^n} f^{(n)}(t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) dt_1 \cdots dt_n. \quad (2.3)$$

其中 s^n 是 n 维单纯形体

$$s^n=\left\{(t_1,\ \cdots,\ t_n)\ \middle|\ t_i\geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} t_j\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\},$$

$$t_0=1-\sum_{j=1}^{n} t_j.$$

证明　$n=1$ 时 $s^1=[0,\ 1]$，(2.3)右端成为

$$\int_0^1 f'(t_0x_0+t_1x_1)dt_1=\int_0^1 f'(x_0+(x_1-x_0)t_1)dt_1=[x_0,x_1]f.$$

假设 $n=k-1$ 时(2.3)成立．按积分的定义(2.3)右端等于

$$\int_0^1 dt_1\int_0^{1-t_1} dt_2\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{k-1}} f^{(k)}(x_0t_0+\cdots+x_kt_k)dt_k$$

$$=\frac{1}{x_k-x_0}\Big[\int_{s^{k-1}} f^{(k-1)}(x_0+t_1(x_1-x_0)+\cdots+t_{k-1}(x_{k-1}-x_0)$$

$$+(x_k-x_0)(1-t_1-\cdots-t_{k-1}))dt_{k-1}\cdots dt_1$$

$$-\int_{s^{k-1}} f^{(k-1)}(x_0+t_1(x_1-x_0)+\cdots$$

$$+t_{k-1}(x_{k-1}-x_0))dt_{k-1}\cdots dt_1\Big],$$

上式右端第一个积分中，记 $t_k=1-\sum\limits_{j=1}^{k-1} t_i$，可写成

$$\int_{s^{k-1}} f^{(k-1)}(x_1t_1+\cdots+x_{k-1}t_{k-1}+x_kt_k)dt_{k-1}\cdots dt_1,$$

即等于 $[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k]f$．同理在第二个积分中，记

$$t_0=1-\sum_{j=1}^{k-1} t_j.$$

它等于　$\int_{s^{k-1}} f^{(k-1)}(x_0t_0+\cdots+x_{k-1}t_{k-1})dt_{k-1}\cdots dt_1$，

即 $[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k]f$，整理之，上面等式右端便等于 $[x_0,\ \cdots,\ x_k]f$．证毕．

由公式(2.2)，记 $f^{(k)}(t)=g(t)$，则有

$$\frac{1}{(x_{i+n}-x_i)(n-1)!}\int_{x_i}^{x_{i+n}} B_{i,n}(t)g(t)dt$$

$$=\int_{s_n} g(x_i t_0+\cdots+x_{i+n}t_n)dt_n\cdots dt_1,$$

其中 $t_0=1-\sum_{j=1}^{n} t_j$. 作变换

$$\left.\begin{aligned} &y_1=x_i+(x_{i+1}-x_i)t_1+\cdots+(x_{i+n}-x_i)t_n,\\ &y_2=b_2+a_{21}t_1+\cdots+a_{2n}t_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &y_n=b_n+a_{n1}t_1+\cdots+a_{nn}t_n, \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

其中 a_{ij} 可以这样选取，使得关于 $t_1, \cdots, t_n$ 的系数行列式不等于 0. 线性变换(2.4)将 s^n 映成闭域 σ^n，即

$$\int_{s^n} g(x_i+(x_{i+1}-x_i)t_1+\cdots+(x_{i+n}-x_i)t_n)dt_1\cdots dt_n$$

$$=\int_{\sigma^n} g(y_1)\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right|^{-1} dy_1\cdots dy_n.$$

上式令 $g\equiv1$，注意到 s^n 的体积 $\mathrm{Vol}(s^n)$ 等于 $\frac{1}{n!}$，便有

$$\frac{1}{(x_{i+n}-x_i)(n-1)!}\int_{x_i}^{x_{i+n}} B_{i,n}(t)g(t)dt$$

$$=\int_{\sigma^n} g(y_1)\frac{1}{n!\,\mathrm{Vol}(\sigma^n)}dy_1\cdots dy_n$$

$$=\int_{x_i}^{x_{i+n}}\frac{\mathrm{Vol}((y_1,\cdots,y_n)\in\sigma^n|y_1=t)}{n!\,\mathrm{Vol}(\sigma^n)}g(t)dt,$$

注意到 $g(t)$ 的任意性，便有

$$B_{i,n}(t)=\frac{(x_{i+n}-x_i)}{n}\cdot\frac{\mathrm{Vol}((y_1,\cdots,y_n)\in\sigma^n|y_1=t)}{\mathrm{Vol}(\sigma^n)}, \quad (2.5)$$

其中 σ^n 是由(2.4)所定义的多面体. 公式(2.5)称为 Curry-Schoenberg 关系式. 这个关系式被 de Boor 作了推广(1976年)，将它作为多元 B 样条的一种定义.

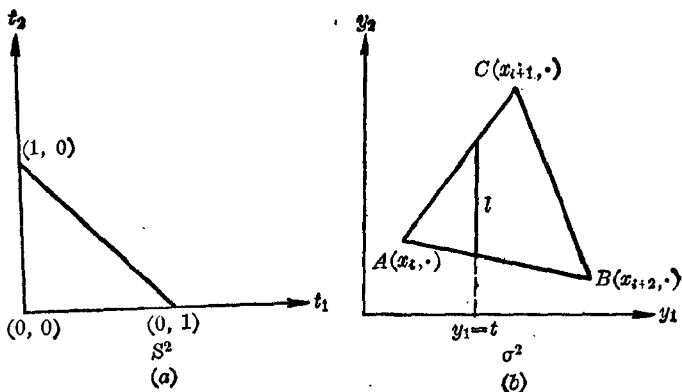


图 2

以 2 阶 B 样条为例，解释公式(2.5)．s^2, σ^2 如图 2.

A、B、C 的第二个坐标可任意，只要 A、B、C 不共线便行．于是

$$B_{i,2}(t)=\frac{x_{i+2}-x_i}{2}\cdot\frac{y_1=t\text{ 截取 }\triangle ABC\text{ 的长度 }l}{\triangle ABC\text{ 面积}}.$$

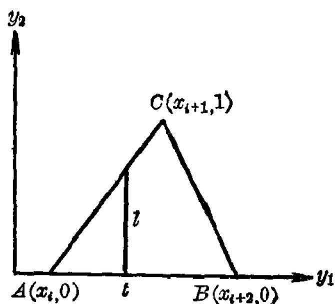


图 3

如果取 $A=(x_i, 0)$, $B=(x_{i+2}, 0)$, $C=(x_{i+1}, 1)$ 便有图 3, $B_{i,2}(t)$ 等于 $y_1=t$ 截取 $\triangle ABC$ 的长度．并且当 $t\overline{\in}(x_i, x_{i+2})$ 时 $B_{i,2}(t)$ 等于 0, 这便是我们通常理解的 B 样条图形．

关于 B 样条性质，列举如下

(i) **样条结点** $B_{i,k}(x)$ 在 (x_j, x_{j+1}) $j=i, \cdots, i+k-1$ 中是 $k-1$ 次代数多项式, $B_{i,k}(x)\in C^{k-2}(-\infty, \infty)$. $B_{i,k}(x)$的 $k-1$ 阶导数在 $x_i, x_{i+1},$

$\cdots$, x_{i+k}(称为 B 样条的结点)产生间断.

(ii) **凸性组合** 记 $f(t)=(t-x)\varphi(t)$，由差商的 Leibniz 公式有

$$[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]f=\frac{x_{i+k}-x}{x_{i+k}-x_i}[x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]\varphi$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i}[x_i,\ \cdots,\ x_{i+k-1}]\varphi,$$

令 $f(t)=(t-x)_+^{k-1}=(t-x)(t-x)_+^{k-2}$, 便得到 B 样条计算的递推关系

$$B_{i,k}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+k-1}-x_i}B_{i,k-1}(x)+\frac{x_{i+k}-x}{x_{i+k}-x_{i+1}}B_{i+1,k-1}(x),$$

$$k=2,\ 3,\ \cdots; \qquad (2.6)$$

若记

$B_{i,k}(x)=(x_{i+k}-x_i)Q_{i,k}(x)$, $Q_{i,k}(x)=[x_i,\cdots,x_{i+k}](\cdot-x)_+^{k-1}$

则又有

$$Q_{i,k}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i}Q_{i,k-1}(x)+\frac{x_{i+k}-x}{x_{i+k}-x_i}Q_{i+1,k-1}(x). \qquad (2.6)'$$

其中

$$B_{i,1}(x)=(x_{i+1}-x_i)[x_i,\ x_{i+1}](\cdot-x)_+^0=\begin{cases}1 & x\in(x_i,\ x_{i+1}],\\ 0 & x\overline{\in}(x_i,\ x_{i+1}].\end{cases} \qquad (2.7)$$

也即是讲，将间断函数 $B_{i,1}$, $B_{i+1,1}$ 按(2.6)进行线性组合便得到连续函数 $B_{i,2}(x)$. 再则，由连续函数 $B_{i,2}$ 和 $B_{i+1,2}$ 的组合得到了一阶导数连续的三阶 B 样条 $B_{i,3}(x)$ 如此等等.

(iii) **局部非零性** 注意到(2.6)、(2.7)利用归纳法便导得

$$\left.\begin{aligned}B_{i,k}(x)&=0, \quad x\overline{\in}(x_i,\ x_{i+k}),\\ B_{i,k}(x)&>0, \quad x\in(x_i,\ x_{i+k}),\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots.$$

当 $x\in[x_i, x_{i+1}]$ 时，由递推关系公式(2.5)并注意到仅有 k 个 B 样条：$B_{i-k+1,k}(x)$，…，$B_{i,k}(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上非零，类似于差商表，我们得到 B 样条计算的格式如下表：

表 1 （箭头示计算方向）

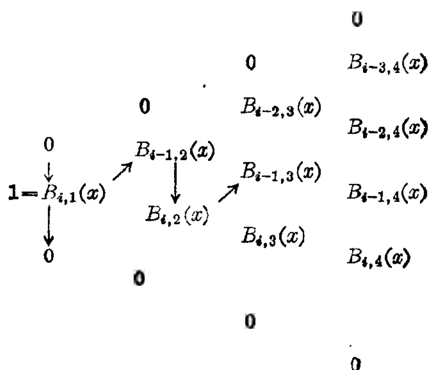


表 1 中，仅有 $B_{j,4}(x)$，$i-3\leqslant j\leqslant i$ 四个函数在 $[x_i, x_{i+1}]$ 非零，它由 $B_{i,1}(x)$ 通过箭头指示方向逐个计算出来.

B 样条一个极重要性质是它组成样条函数的基底.

定义 2 对于 $[a, b]$ 的一个扩大分划

$$\pi:\ x_1<\cdots<x_k=a<x_{k+1}<\cdots<x_{n+1}$$
$$=b<x_{n+2}<\cdots<x_{n+k},$$

称函数

$$s(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j x^j+\sum_{j=1}^{n-k}\beta_j(x-x_{k+j})_+^{k-1}/(k-1)!,\quad a\leqslant x\leqslant b \quad (2.9)$$

为定义在 $[a, b]$ 上相应于分划 π 的 k 阶($k-1$ 次)样条函数. 这里 α_j, β_j 均系常数. 全体 $s(x)$ 组成一线性空间，记之为 $\mathrm{Sp}(D^k, \pi)$.

引理 2 线性空间 $\mathrm{Sp}(D^k, \pi)$ 的维数为 n.

证明 只需证明函数系

$$\mathscr{L}_1=\{1,\ x,\ \cdots,\ x^{k-1},\ (x-x_{k+1})_+^{k-1},\cdots,\ (x-x_n)_+^{k-1}\},$$
$$a\leqslant x\leqslant b \tag{2.10}$$

是线性无关的. 事实上,若 $\mathscr{L}_1$ 线性相关,则存在一组不全为零的数 a_j, b_j 使得

$$\sum_{j=0}^{k-1}a_jx^j+\sum_{j=1}^{n-k}b_j(x-x_{k+j})_+^{k-1}\equiv 0,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

令 $x<x_{k+1}$ 推得 $\sum\limits_{j=0}^{k-1}a_jx^j\equiv 0$,从而 $a_j=0$, $j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1$; 令 $x_{k+1}<x<x_{k+2}$ 导致 $b_1=0$; 当 $x_{k+2}<x<x_{k+3}$ 又导致 $b_2=0$; 最后当 $x_n<x<x_{n+1}$ 时有 $b_{n-k}=0$. 证毕.

引理 3(de Boor 和 Fix[1973]) 假定 λ_i 是一个线性泛函,它被定义为

$$\lambda_i f=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\Psi^{(k-1-r)}(\tau_i)f^{(r)}(\tau_i), \tag{2.11}$$

这里 $\Psi(x)=(x_{i+1}-x)\cdots(x_{i+k-1}-x)/(k-1)!$,
$\tau_i\in(x_i,\ x_{i+k})$,则有

$$\lambda_iB_{j,k}(x)=\delta_{i,j},\ 对一切\ j\ 成立, \tag{2.12}$$

其中 $B_{j,k}(x)$ 是关于 x_j, $\cdots$, x_{j+k} 的 k 阶 B 样条.

证明 直接计算有

$$\lambda_iB_{j,k}(x)=\sum_{l=j}^{j+k}\omega_{j,l}\lambda_i(x_l-x)_+^{k-1},$$

$$\omega_{j,l}=\frac{(x_{j+k}-x_j)}{\prod\limits_{\substack{\nu=j\\ \nu\neq l}}^{j+k}(x_l-x_\nu)},$$

$$\begin{aligned}
而\ \lambda_i(x_l-x)_+^{k-1}&=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\Psi^{(k-1-r)}(\tau_i)\\
&\quad\times(k-1)\cdots(k-r)(-1)^r(x_l-\tau_i)_+^{k-1-r}\\
&=(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(x_l-\tau_i)_+^{k-1-r}}{(k-1-r)!}\Psi^{(k-1-r)}(\tau_i),
\end{aligned}$$

据此，当 $x_l<\tau_i$ 时恒有 $\lambda_i(x_l-x)_+^{k-1}=0$；当 $x_l\geqslant\tau_i$ 时，上式右端求和部分恰好是 $\Psi(s)$ 按 τ_i 处的 Taylor 展开式，而取值于 x_l，即 $\lambda_i(x_l-x)_+^{k-1}=(-1)^{k-1}(k-1)!\Psi(x_l)$。总之，不论哪一种情况都有

$$\lambda_i(x_l-x)_+^{k-1}=(-1)^{k-1}(k-1)!\Psi(x_l)(x_l-\tau_i)_+^0. \qquad (2.13)$$

从而

$$\begin{aligned}\lambda_i B_{j,k}(x)&=(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{l=j}^{j+k}\omega_{j,l}\Psi(x_l)(x_l-\tau_i)_+^0\\&=(-1)^{k-1}(k-1)!(x_{j+k}-x_j)\\&\quad\times[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+k}]\Phi_i(x),\end{aligned}$$

这里
$$\Phi_i(x)=\Psi(x)(x-\tau_i)_+^0.$$

注意，当 $l=i+1,\cdots,i+k-1$ 时 $\Psi(x_l)=0$，又当 $l\leqslant i$ 时 $(x_l-\tau_i)_+^0=0$，故当 $l\leqslant i+k-1$ 时，恒有 $\Phi_i(x_l)=0$；换言之，当 $j+k\leqslant i+k-1$（即 $j\leqslant i-1$）时有 $\Phi_i(x_{j+k})=0$，故

$$[x_j,\cdots,x_{j+k}]\Phi_i=0,\quad 当\ j\leqslant i-1\ 时成立.$$

当 $j=i+1,\cdots,i+k-1$ 时，$\Phi_i(x_j)=\Psi(x_j)=0$。又当 $j\geqslant i+k$ 时，$\Phi_i(x_j)=\Psi(x_j)(x_j-\tau_i)_+^0=\Psi(x_j)$。从而，当 $j>i$ 时有 $\Phi_i(x_j)=\Psi(x_j)$ 或即有

$$[x_j,\cdots,x_{j+k}]\Phi_i=[x_j,\cdots,x_{j+k}]\Psi_i=0,\quad j>i.$$

最后，研究 $j=i$ 的情况，作辅助函数

$$p(x)=\Psi(x)(x-x_i)/(x_{i+k}-x_i),$$

容易验明

$$p(x_l)=\Phi_i(x_l),\quad l=i,i+1,\cdots,i+k.$$

从而
$$\begin{aligned}[x_i,\cdots,x_{i+k}]\Phi_i&=[x_i,\cdots,x_{i+k}]p\\&=(-1)^{k-1}\frac{1}{(x_{i+k}-x_i)(k-1)!},\end{aligned}$$

综合上面三种情况，便有 $\lambda_i B_{j,k}=\delta_{ij}$。证毕。

定理1 B 样条函数系

$$\mathscr{L}_2=\{B_{1,k}(x),\ B_{2,k}(x),\ \cdots,\ B_{n,k}(x)\} \qquad (2.14)$$

构成 k 阶样条函数空间 $\mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$的基底.

证明 施以反证法，假设 $\mathscr{L}_2$ 线性相关，即存在不全为零的常数 c_j 使得

$$\sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,k}(x) \equiv 0, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

注意 B 样条的局部非零性质，总可选取 $\tau_i \in [a,\ b]$，于是，记上式右端函数为 f，它对一切 $x \in [a,\ b]$ 恒为零，注意到 $\tau_i \in [a,\ b]$，则对任意 r 有 $f^{(r)}(\tau_i)=0$，从而 $\lambda_i f=0$. 即有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_i B_{j,k}(x)=c_i=0, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

另一方面，容易看出 $B_{j,k}(x) \in \mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$，这就说明 $\mathscr{L}_2$ 是 n 维线性空间 $\mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$的基底. 证毕.

注意，如果$[a,\ b]$分划的序号为

$$\pi:\ x_{-k+1}<\cdots<x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b<x_{n+1}<\cdots<x_{n+k-1},$$

那末，据定理 1 函数系

$$\mathscr{L}_3=\{B_{-k+1,k}(x),\ B_{-k,k}(x),\ \cdots,\ B_{n-1,k}(x)\} \qquad (2.14)$$

将组成相应样条函数空间的基底.

定理 2(Marsden 恒等式) 下列关系式成立:

$$\left.\begin{aligned}
&(x-t)^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-t)\cdots(x_{j+k-1}-t)B_{j,k}(x),\\
&\qquad\qquad -\infty<t<\infty,\\
&(x-x_l)_+^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-x_l)_+(x_{j+2}-x_l)\\
&\qquad\qquad \times\cdots(x_{j+k-1}-x_l)B_{j,k}(x),\\
&\qquad\qquad l=k+1,\ \cdots,\ n.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

证明 记 $s(x)=(x_l-x)_+^{k-1} \in \mathrm{Sp}(D^k, \pi)$, $l=k+1, \cdots, n$, 故可由 $\mathscr{L}_2$ 线性表出，即

$$(x_l-x)_+^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}c_jB_{j,k}(x),$$

按 de Boor 和 Fix 引理两边取泛函 λ_i, 注意到(2.13)便有

$$\begin{aligned}c_i&=\lambda_i(x_l-x)_+^{k-1}\\&=(-1)^{k-1}(k-1)!\Psi(x_l)(x_l-\tau_i)_+^0\\&=(x_l-x_{i+1})\cdots(x_l-x_{i+k-1})(x_l-\tau_i)_+^0,\end{aligned}$$

从而成立着关系式

$$\begin{aligned}&(x_l-x)_+^{k-1}\\&=\sum_{j=1}^{n}(x_l-x_{j+1})\cdots(x_l-x_{j+k-1})(x_l-\tau_j)_+^0B_{j,k}(x).\end{aligned}$$

注意到$(x-t)^{k-1}\in\mathrm{Sp}(D^k,\pi)$有

$$\begin{aligned}\lambda_i(x-t)^{k-1}&=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\Psi^{(k-1-r)}(\tau_i)\\&\quad\cdot(\tau_i-t)^{k-1-r}\cdot(k-1)\cdots(k-r)\\&=(k-1)!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(t-\tau_i)^{k-1-r}}{(k-1-r)!}\Psi^{(k-1-r)}(\tau_i)\\&=(k-1)!\Psi(t),\end{aligned}$$

故

$$(x-t)^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-t)\cdots(x_{j+k-1}-t)B_{j,k}(x),$$

注意到 $(x-x_l)_+^{k-1}=(x-x_l)^{k-1}+(-1)^k(x_l-x)_+^{k-1}$ 便有

$$\begin{aligned}(x-x_l)_+^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}&(x_{j+1}-x_l)\cdots(x_{j+k-1}-x_l)\\&\times[1-(x_l-\tau_j)_+^0]B_{j,k}(x).\end{aligned}$$

取 $\tau_j=x_{j+1}$, 上式写成

$$\begin{aligned}(x-x_l)_+^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}&(x_{j+1}-x_l)_+(x_{j+2}-x_l)\\&\times\cdots(x_{j+k-1}-x_l)B_{j,k}(x).\end{aligned}$$

证毕.

注意到 τ_j 选取的任意性，也可将上式写成

$$(x-x_l)_+^{k-1}=\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-x_l)_+(x_{j+2}-x_l)_+ \times\cdots(x_{j+k-1}-x_l)_+B_{j,k}(x).$$

下面举出 de Boor 和 Fix 引理的二个应用。

利用泛函 $\lambda_i f$ 构造曲线

注意到 $f\in \mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$ 时有

$$f=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f B_{j,k}(x), \tag{2.16}$$

换言之，任意曲线 $y=g(x)$ 的样条逼近

$$z=Ag(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g B_{j,k}(x),$$

当 $g\in \mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$ 它有再生性质，即 $Ag=g$. (2.16)表明，线性空间 $\mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$ 的任一元素 f，它可由基底 $\mathscr{L}_2=\{B_{1,k},\ \cdots,\ B_{n,k}\}$ 线性表出，且其系数为 $\lambda_j f$.

B 样条函数是具有最小支集的样条函数 事实上，在 $\mathrm{Sp}(D^k,\ \pi)$ 中若还有函数 φ，它在 $[x_i,\ x_j]$，$j<i+k$ 外恒为零. 依据 τ_i 选法的任意性，我们选取一切 τ_i 均不属于 $[x_i,\ x_j]$，于是利用 de Boor 和 Fix 引理求得 $\varphi\equiv 0$，$x\in[a,\ b]$ 成立.

下面，我们转入 B 样条级数的数值运算. 首先在(2.2)中令 $f(t)$ 是 k 次多项式，便得到面积公式

$$\frac{k}{(x_{i+k}-x_i)}\int_{x_i}^{x_{i+k}}B_{i,k}(x)dx=1.$$

对于 $[a,\ b]$ 的一个扩大了的分划

$$\pi:\quad x_1<\cdots<x_k=a<x_{k+1}<\cdots<x_{n+1} =b<x_{n+2}<\cdots<x_{n+k},$$

若 $x\in[x_i,\ x_{i+1}]\subset[a,\ b]$，考虑 B 样条的总和有

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} B_{j,k}(x) &= \sum_{j=i+1-k}^{i} B_{j,k}(x) \\
&= \sum_{j=i+1-k}^{i} [x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} \\
&\quad - \sum_{j=i+1-k}^{i} [x_j, \cdots, x_{j+k-1}] (\cdot - x)_+^{k-1} \\
&= [x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} \\
&\quad - [x_{i+1-k}, \cdots, x_i] (\cdot - x)_+^{k-1} \\
&= [x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] (\cdot - x)^{k-1} = 1.
\end{aligned}
$$

故有

$$
\sum_{j=1}^{n} B_{j,k}(x) \equiv 1, \ a \leqslant x \leqslant b, \ k \geqslant 2. \tag{2.17}
$$

研究级数 $s(x)=\sum\limits_r \alpha_r B_{r,k}(x)$ 的递推求和，这里 r 的上下限故意未标出，它对于有限求和或无限求和都适应。由(2.6)有

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \sum_r \alpha_r \frac{x - x_r}{x_{r+k-1} - x_r} B_{r,k-1}(x) \\
&\quad + \sum_r \alpha_r \frac{x_{r+k} - x}{x_{r+k} - x_{r+1}} B_{r+1,k-1}(x) \\
&= \sum_r \alpha_r^{[2]}(x) B_{r,k-1}(x),
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

其中 $\alpha_r^{[2]}(x) = \dfrac{(x-x_r)\alpha_r + (x_{r+k-1}-x)\alpha_{r-1}}{x_{r+k-1}-x_r}, \quad \alpha_0 = 0.$

进一步，我们导得了递推关系

$$
\left.
\begin{aligned}
& s(x) = \sum_r \alpha_r^{[j+1]}(x) B_{r,k-j}(x), \quad j = 0, 1, \cdots, k-1, \\
& \alpha_r^{[j+1]}(x) = \begin{cases} \alpha_r, \quad j = 0, \\ \dfrac{(x-x_r)\alpha_r^{[j]}(x) + (x_{r+k-j}-x)\alpha_{r-1}^{[j]}(x)}{x_{r+k-j}-x_r}, \ j > 0, \\ \alpha_0^{(j)}(x) = 0. \end{cases}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.19}
$$

这表明 $s(x)$ 是 $k-j$ 阶 B 样条的“线性组合”，不过它的系数不是常数，而是关于 x 的 j 次多项式。

下面仅就 $[a, b]$ 的分划是单结点的情况来讨论．令 $j=k-1$，假定 $[a, b]$ 中的任一点 x 落在 $[x_i, x_{i+1}]$ 中，于是

$$B_{r,k-j}(x)=B_{r,1}(x)=\begin{cases}1, & r=i,\\ 0, & r\neq i.\end{cases}$$

因而有

$$s(x)=\alpha_i^{[k]}(x), \quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}. \tag{2.20}$$

从递推关系式我们知道，要计算 $\alpha_i^{[k]}(x)$ 需要用到 α_{i-k+1}, α_{i-k+2}, $\cdots$, α_i 的值．参见下表：

表 2

$\alpha_{i-k+1}=\alpha_{i-k+1}^{[1]}(x)$	$\alpha_{i-k+2}^{[2]}(x)$			
$\alpha_{i-k+2}=\alpha_{i-k+2}^{[1]}(x)$	$\alpha_{i-k+3}^{[2]}(x)$	$\vdots$	$\alpha_{i-1}^{[k-1]}(x)$	$\alpha_i^{[k]}(x)$
$\vdots$ $\quad\vdots$	$\vdots$		$\alpha_i^{[k-1]}(x)$	
$\alpha_{i-1}=\alpha_{i-1}^{[1]}(x)$	$\alpha_i^{[2]}(x)$			
$\alpha_i=\alpha_i^{[1]}(x)$				

下面，导出 $s(x)$ 分片表达式的矩阵形式，由于

$$s(x)=\alpha_i^{[k]}(x), \quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},$$

而
$$\alpha_i^{[k]}(x)=\frac{(x-x_i)\alpha_i^{[k-1]}(x)+(x_{i+1}-x)\alpha_{i-1}^{[k-1]}(x)}{x_{i+1}-x_i}.$$

令 $\dfrac{x-x_i}{\Delta x_i}=u$，其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，故当 $x\in[x_i, x_{i+1}]$ 时有 $u\in[0, 1]$，上式可写成

$$\alpha_i^{[k]}(x)=(u, 1)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{i-1}^{[k-1]}(x)\\ \alpha_i^{[k-1]}(x)\end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

进而导得

$$\alpha_i^{[k]}(x)=(u^2,\ u,\ 1)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{-\Delta x_i}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}} & \dfrac{\Delta x_i}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}} & 0\\ \dfrac{\Delta x_i}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}} & \dfrac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}} & 0\\ 0 & \dfrac{-\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}+\Delta x_i} & \dfrac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}+\Delta x_i}\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{i-2}^{[k-2]}(x)\\ \alpha_{i-1}^{[k-2]}(x)\\ \alpha_i^{[k-2]}(x)\end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

如此等等.

进一步，我们研究 B 样条级数的求导公式，注意

$$B_{i,k}(x)=([x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]-[x_i,\ \cdots,\ x_{i+k-1}])(\cdot-x)_+^{k-1},$$

有
$$\frac{d}{dx}B_{i,k}(x)=-(k-1)([x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]-[x_i,\ \cdots,\ x_{i+k-1}])(\cdot-x)_+^{k-2}$$
$$=(k-1)\left(\frac{B_{i,k-1}(x)}{x_{i+k-1}-x_i}-\frac{B_{i+1,k-1}(x)}{x_{i+k}-x_{i+1}}\right),$$

从而

$$\frac{d}{dx}\sum_i\alpha_iB_{i,k}(x)=(k-1)\left(\sum_i\frac{\alpha_i}{x_{i+k-1}-x_i}B_{i,k-1}(x)-\sum_i\frac{\alpha_i}{x_{i+k}-x_{i+1}}B_{i+1,k-1}(x)\right)$$
$$=(k-1)\sum_i\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{x_{i+k-1}-x_i}B_{i,k-1}(x).$$

特别的有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\sum_{i=r}^{s}\alpha_i B_{i,k}(x)=\sum_{i=r}^{s+1}(k-1)\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{x_{i+k-1}-x_i}B_{i,k-1}(x),\\&\alpha_{r-1}=\alpha_{s+1}=0.\end{aligned}\right\}$$

进一步，我们可求得高阶导数

$$\frac{d^j}{dx^j}\left(\sum_i \alpha_i B_{i,k}(x)\right)=\sum_i \alpha_i^{[j+1]}B_{i,k-j}(x), \qquad (2.23)$$

其中

$$\alpha_r^{[j+1]}=\begin{cases}\alpha_r, & \text{当 } j=0,\\ \dfrac{(\alpha_r^{[j]}-\alpha_{r-1}^{[j]})}{(x_{r+k-j}-x_r)}(k-j), & \text{当 } j>0.\end{cases}$$

下面我们来叙述等距分划的 B 样条函数. 假定等距节点 x_i 的步长为 h, 由(2.3)有

$$\begin{aligned}B_{i,k}(x)&=(x_{i+k}-x_i)[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}](\cdot-x)_+^{k-1}\\&=kh\,\frac{\Delta^k(x_i-x)_+^{k-1}}{k!\,h^k}\\&=E^{\frac{k}{2}}\delta^k\left(\frac{x_i-x}{h}\right)_+^{k-1}\Big/(k-1)!,\end{aligned}$$

其中 E 和 δ 是对 x_i 作用的且步长为 1.

定义 3 称 $\Omega_{k-1}(x)=\dfrac{\delta^k x_+^{k-1}}{(k-1)!}$, δ 的步长为 1, 为等距分布的 k 阶 B 样条函数, 文献中也记 $\Omega_{k-1}(x)$ 为 $M_k(x)$.

容易看出函数系

$$\mathscr{L}_3=\left\{\Omega_{k-1}\left(\frac{x_{i+\frac{k}{2}}-x}{h}\right),\ i=-k+1,\ \cdots,\ N-1\right\} \qquad (2.24)$$

构成了等距分划 $\left(x_j=a+jh,\ h=\dfrac{b-a}{N},\ k+N-1=n\right)$

$$\begin{aligned}\pi:\quad x_{-k+1}<\cdots<x_{-1}<x_0=a<x_1<\cdots<x_N\\=b<x_{N+1}<\cdots<x_{N+k-1}\end{aligned}$$

的样条函数空间 $Sp(D^k,\pi)$ 的基底。

关于 $\Omega_k(x)$ 的性质列举如下

(i) $$\Omega_k(x)=\frac{1}{k}\left[\left(\frac{k+1}{2}+x\right)\Omega_{k-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{k+1}{2}-x\right)\Omega_{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right],$$

或 $$\Omega_k(x)=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{k+1}{j}\left(x+\frac{k+1}{2}-j\right)_+^k\Big/k!.$$

(ii) $$\Omega_k(-x)=\Omega_k(x);$$

$$\Omega_k(x)\equiv 0,\quad 当\ |x|\geqslant\frac{k+1}{2}.$$

(iii) $$\Omega_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Omega}_k(\xi)e^{i\xi x}d\xi,$$

其中 $$\hat{\Omega}_k(x)=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^{k+1}.$$

(iv) $$\delta^k f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}(x-t)f^{(k)}(t)dt,\quad \delta\ 步长为\ 1,$$

或 $$\frac{\delta^k f(x)}{h^k}=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)f^{(k)}(t)dt,\ \delta\ 步长为\ h.$$

在本节的末尾，我们叙述 V. D 逼近定理。

给定序列 $\{t_j\}_1^{n+k}$，其中 $t_i<t_{i+k}$，$t_1=\cdots=t_k=a$，$t_{k+1}=\cdots=t_{n+k}=b$，如同第1章，我们建立对上述分划的 B 样条系 $B_{1,k}(x)$，…，$B_{n,k}(x)$，令

$$s(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j B_{j,k}(x),\tag{2.25}$$

注意 $\sum_{j=1}^{n}B_{j,k}(x)=1$，$B_{j,k}(x)\geqslant 0$，于是当 $t_i\leqslant x\leqslant t_{i+1}$ 时有

$$\mathrm{Min}\{\alpha_{i+1-k},\cdots,\alpha_i\}\leqslant s(x)\leqslant\mathrm{Max}\{\alpha_{i+1-k},\cdots,\alpha_i\}.$$

下面，我们引用 de Boor 的一个结果：

引理 4 如果 $s(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j B_{j,k}(x)$ 和对于序列 $\tau_1<\cdots<\tau_r$ 有 $s(\tau_{i-1})s(\tau_i)<0$, $i=2, \cdots, r$ 成立．那么，可以找到一组下标：

$$1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$$

使得

$$\alpha_{j_i}B_{j_i,k}(\tau_i)s(\tau_i)>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r. \qquad (2.26)$$

由上面的引理我们推得，$B_{j_i,k}(\tau_i)\neq 0$，也即是说 $t_{j_i}<\tau_i<t_{j_i+k}$；系数 α_{j_i} 必须非零，且跟 $s(\tau_i)$ 同号．进一步，假定样条函数 $s(x)=\sum\alpha_j B_{j,k}(x)$ 在开区间 $(t_i,\ t_{i+1})$ 有 $k-1$ 个单根，于是在 $(t_i,\ t_{i+1})$ 区间可找到数列 $\tau_1<\cdots<\tau_k$，使 $s(\tau_{j-1})s(\tau_j)<0$, $j=2, \cdots, k$．由引理，存在 k 个下标 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$ 使得 $B_{i_j}(\tau_j)\neq 0$ 且 $\alpha_{i_j}s(\tau_j)>0$, $j=1, \cdots, k$．但是，由于 $\tau_1, \cdots, \tau_k$ 位于相同区间 $(t_i,\ t_{i+1})$，而通过 $(t_i,\ t_{i+1})$ 仅有 k 个 B 样条 $B_{i-k+1,k}(x), \cdots, B_{i,k}(x)$ 为非零，于是 $i_j=i+1-k+(j-1)=i-k+j$，并且

$$\alpha_{i-k+j}s(\tau_j)>0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

我们知道 $s(x)$ 在 $[t_i,\ t_{i+1}]$ 仅依赖于系数 $\alpha_{i-k+1}, \cdots, \alpha_i$，根据上述分析，这个系数必须轮流严格变号，并且跟 s 的符号一致．如果 $s(x)$ 在区间 $[t_i,\ t_{i+1}]$ 左端点是正的，则 $\alpha_{i-k+1}, \cdots, \alpha_i$ 最左的系数 α_{i+1-k} 也必须是正的．这个特性，使我们深抱希望：通过系数刻画 $s(x)$ 的大致

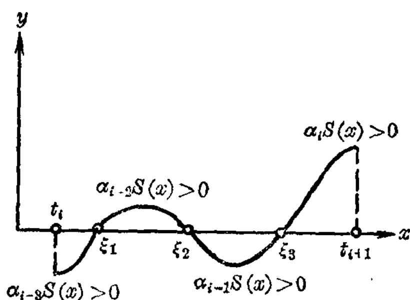


图 4　$k=4$ 的情况

走向.

由引理 4 直接可得 V.D 逼近定理.

定理 3 样条函数 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j B_{j,k}(x)$ 在 $[a, b]$ 的变号数目不超过系数 α_j 变号的数目.

现在,我们令

$$\alpha_i = t_i^* = \frac{t_{i+1}+\cdots+t_{i+k-1}}{k-1},\quad i=1, 2, \cdots, n. \qquad (2.27)$$

则由引理 3 并记

$$f = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j B_{j,k}(x)$$

有

$$\begin{aligned}\lambda_i f &= \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_i B_{j,k}(x) = \alpha_i\\ &= f(\tau_i) + f'(\tau_i)(-D)^{k-2}\Psi(\tau_i)\\ &\quad + \sum_{r=2}^{k-1}(-D)^{k-1-r}\Psi(\tau_i)(D^r f)(\tau_i), \qquad (2.28)\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= (t_{i+1}-x)\cdots(t_{i+k-1}-x)/(k-1)!\\ &= (-x)^{k-1}/(k-1)!\\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{k-1}t_{i+j}\right)(-x)^{k-2}/(k-1)! + \text{低阶项},\end{aligned}$$

τ_i 位于开区间 $(t_i,\ t_{i+k})$ 中.

记

$$|t| = \max_j \Delta t_j,$$

则当 t 充分小时有

$$\Psi^{(k-1-r)}(\tau_i) = O(|t|^r).$$

于是当 $|t|\to 0$ 有

$$\alpha_i = f(\tau_i) + O(|t|).$$

注意,由于

$$\Psi^{(k-2)}(x) = (-1)^{k-2}\left(-x + \sum_{j=1}^{k-1}t_{i+j}/(k-1)\right),$$

故 $\Psi^{(k-2)}(t_i^*)=0$, 令 $\tau_i=t_i^*$, 求得

$$\alpha_i=f(t_i^*)+O(|t|^2).$$

对于$[a, b]$上给定的函数 g, 构造样条逼近

$$V_g=\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)B_{i,k}(x), \quad x\in[a, b], \tag{2.29}$$

用 $s^-(f)$表示 f 在$[a, b]$的变号次数, 则有

$$s^-(V_g)\leqslant s^-(g(t_i^*)_1^n)\leqslant s^-(g). \tag{2.30}$$

公式(2.29)就是 J. Shoenberg 于 1966 年提出并论证了的变号缩减样条逼近, 简称 V.D 逼近. 这种逼近能再生一次多项式. 事实上, 假定 $l(x)$是一次多项式, 则有

$$l(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i B_{i,k}(x),$$

由(2.28)取 $\tau_i=t_i^*$ 有 $\alpha_i=l(t_i^*)$.

V.D 逼近公式(2.29)的一个优点是有局部逼近性质, 即在(t_i, t_{i+1})上 V_g 仅依赖于 $g(t_{i-k+1}^*)$, …, $g(t_i^*)$的值. 其次, 具有变号缩减性质, 且计算简单, 近年来被利用来建立外形设计的曲线拟合模型.

取步长为 h 的等距分划, 有

$$t_i^*=\frac{t_{i+1}+\cdots+t_{i+k-1}}{k-1}=t_{i+\frac{k}{2}},$$

$$B_{i,k}(x)=\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t_{i+\frac{k}{2}}}{h}\right),$$

V.D 逼近变成磨光公式

$$V_g=\sum_{i=1}^{n}g(t_{i+\frac{k}{2}})\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t_{i+\frac{k}{2}}}{h}\right). \tag{2.31}$$

第 2 章

全局逼近法

§1 自适应的曲线拟合法

1-1 概况

曲线数值表示的一个基本方法是全局(整体)逼近法. 假定考虑的是连续函数空间 $C[a, b]$. 记

$$y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b$$

是定义在区间 $[a, b]$ 上的曲线. 曲线逼近的第一步是选择好曲线模型

$$y=F(\underset{\sim}{c}, x), \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

这里 $\underset{\sim}{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 含有 n 个参数. 若取 $[a, b]$ 上的一组线性无关函数 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 为基, 将 $F(\underset{\sim}{c}, x)$ 表成

$$y=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x), \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

称上式右端为 $f(x)$ 的线性逼近函数, $c_1, \cdots, c_n$ 为线性逼近参数.

在曲线拟合问题中, 常采用半线性逼近函数类, 即

$$y=F(\underset{\sim}{c}, d, x)=\varphi_0(\underset{\sim}{d}, x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(\underset{\sim}{d}, x).$$

其中 $\underset{\sim}{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为线性逼近参数. $\underset{\sim}{d}=(d_1, d_2, \cdots, d_q)$ 称为非线性逼近参数. 一个这方面的重要例子是令 $q=n$, $\varphi_0(\underset{\sim}{d}, x)\equiv 0$, 而 $\varphi_j(\underset{\sim}{d}, x)=\exp(-d_jx)$, $j=1, 2, \cdots, n$. 下

面，列举几个常用的半线性逼近函数类：

$$y=a+be^{-cx},$$

$$y=ae^{-bx},$$

$$y=a\cos(bx+c) \text{ 或写成 } \alpha\cos\gamma x+\beta\sin\gamma x,$$

$$y=a+bx+ce^{-dx},$$

$$y=(a+bx)e^{-cx}.$$

这里 a, b, c, d, 均系待定参数.

通常，采用 l_p 模来表示曲线拟合的误差，记

$$e(x)=f(x)-F(\underset{\sim}{c}, x),$$

$e(x)$ 的 l_p 模被定义为

$$\|e\|_p=\left\{\int_a^b \omega(x)\,|e(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

这里 $\omega(x)$ 称为权函数，$\omega(x)\geqslant 0$ 且不恒等于零，$a\leqslant x\leqslant b$. 曲线模型的参数这样选择，使

$$\|e\|_p=\min.$$

通常 p 取成 1、2、∞. 如果 $p=2$, 便是最小二乘逼近，$p=\infty$ 便是最佳一致逼近.

如果 $f(x)$ 以离散形式给出，即给出一组型值点 (x_i, f_i). $i=1, 2, \cdots, m(m\geqslant n)$，相应的 p 模取成

$$\|e\|_p=\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i|e_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

这里 $e_i=f_i-F(\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{d},x_i)$. $f_i=f(x_i)$，ω_i 是相应于 $f(x_i)$ 的权系数.

选择好基函数 $\{\varphi_j\}_1^n$ 是曲线逼近头等重要的事. 无疑，不同问题应有不同选法. 力学的背景是决定 $\{\varphi_j\}_1^n$ 的一个重要手段；由于电子计算机的发展，根据数据 (x_i, f_i)，$i=1,2, \cdots,$

m 特征和专用数值软件(必要时增加人机对话)由机器作出模型和方法的选择是近年来国外所重视的一个研究课题. 这一方法, 称之为自适应的曲线拟合法. 无疑, 按照 p 模的要求, 由机器对代数多项式、指数函数、三角函数、样条函数等作出选择,这样的数值软件是能够研制的.

如果曲线 $y=F(\underset{\sim}{c}, x)$ 在 $[a, b]$ 中任一点的值, 都跟曲线 $y=f(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 的特性有关, 则称 $y=F(\underset{\sim}{c}, x)$ 是 $y=f(x)$ 的全局表示曲线. 如果曲线 $y=F(\underset{\sim}{c}, x)$ 每一点的值仅与 $y=f(x)$ 在这点附近的特性有关, 便称 $y=F(\underset{\sim}{c}, x)$ 为局部表示曲线, 其相应的数值方法称之为局部表示法. 全局代数多项式插值是全局表示法; 而分片三次 Hermite 插值法是局部表示法. 本章将叙述曲线表示的全局表示法.

在数值方法的研究中,适当的引入自变量的替换,能提高逼近的效果. 例如,引入双线性变换

$$X=\frac{x+u}{1+ux}, \quad |u|<1,$$

如果 $x\in[-1, 1]$,那末,$X\in[-1, 1]$. 本章参考文献[13]举出了一个例子,$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $1<x<5$. 按契贝谢夫级数展开, 若 x 不作变换, 为了达到五位准确数字, 需要取 18 项, 而作变换后只需取 5 项. 此外, 也可取对数或倒数作自变量的替换.

在曲线表示的全局方法中, 常用的有插值方法和最小二乘法. 下面指出离散情况下, 最小二乘法和插值法的联系.

给定函数 $f(x)$ 的一组观测数据 (x_i, f_i), $i=1, 2, \cdots, m$, 选取 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$ 为逼近函数 $(m\geqslant n)$. 假定 m 维欧氏空间的向量组

$$X_1=\begin{pmatrix}\varphi_1(x_1)\\ \varphi_1(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_1(x_m)\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}\varphi_2(x_1)\\ \varphi_2(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_2(x_m)\end{pmatrix},\cdots,X_n=\begin{pmatrix}\varphi_n(x_1)\\ \varphi_n(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_n(x_m)\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

是线性无关的. 记

$$(f,\ g)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i f(x_i)g(x_i).$$

所谓离散情况下,函数 $f(x)$ 的最佳逼近元素,是选取 c_i 使

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k\Big(f(x_k)-\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x_k)\Big)^2=\min.\tag{1.2}$$

容易导出上述问题的解是存在、唯一的,且 c_i 由下列方程组给出

$$\left.\begin{array}{l}(\varphi_1,\ \varphi_1)c_1+(\varphi_1,\ \varphi_2)c_2+\cdots+(\varphi_1,\ \varphi_n)c_n=(f,\ \varphi_1),\\ (\varphi_2,\ \varphi_1)c_1+(\varphi_2,\ \varphi_2)c_2+\cdots+(\varphi_2,\ \varphi_n)c_n=(f,\ \varphi_2),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\varphi_n,\ \varphi_1)c_1+(\varphi_n,\ \varphi_2)c_2+\cdots+(\varphi_n,\ \varphi_n)c_n=(f,\ \varphi_n).\end{array}\right\}\tag{1.3}$$

特别地,当 $\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n$ 正交时,有

$$c_i=\frac{(f,\ \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.\tag{1.3$'$}$$

现在,假定 $m=n$, 选取 c_i 满足下列插值问题的解:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x_k)=f(x_k),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.\tag{1.4}$$

由于 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 是线性无关的,因而插值问题(1.4)的解是存在且唯一的. 也即是说能找到一组 c_i^* 使

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Big(f(x_k)-\sum_{i=1}^{n}c_i^*\varphi_i(x_k)\Big)^2=0,$$

再由(1.2)解的存在唯一性,便知 c_i^* 是(1.3)的解. 这意味着,

在 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 线性无关的假设下，**最小二乘法具有插值法的自适应性.**

所以，假定由(1.1)所定义的向量组 $\{X_i\}_1^n$ 是线性无关的，那末，最小二乘法(1.2)的解(1.3)，当 $m=n$ 时便成为插值问题(1.4)的解.

特别地，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是两两正交的向量组，那末(1.2)的解由(1.3)′给出，当 $m=n$ 时便成为插值问题(1.4)的解.

为了减少计算量，选取正交向量组为基是重要的. 下面，我们研究契贝谢夫多项式在这一问题中的应用.

1-2 自适应的代数多项式拟合法

在曲线拟合中，代数多项式是一个基本函数类. 现在，选取第一类契贝谢夫多项式 $\{T_k(x)\}_0^n$ 为基函数，我们将导出一类公式，既适合于曲线插值，也适合于最小二乘拟合，也即是说契贝谢夫多项式有插值和最小二乘法的自适应性. 第一类契贝谢夫多项式被定义为

$$\left.\begin{aligned} &T_n(x)=\cos n\theta, &&0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ &\cos\theta=x, &&|x|\leqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

引理 1 给定契贝谢夫级数

$$y=\sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x),\tag{1.6}$$

Σ' 表示对 k 求和时，$k=0$ 的系数 c_0 要除以 2. 那么有

$$y=\frac{1}{2}(b_0-b_2),\tag{1.7}$$

这里 b_k 满足递推关系

$$\left.\begin{aligned} &b_k=2xb_{k+1}-b_{k+2}+c_k;\ k=n,\ n-1,\ \cdots,\ 0;\\ &b_{n+1}=b_{n+2}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

证明 注意到契贝谢夫多项式的递推关系

$$\left.\begin{array}{l}T_k(x)=2xT_{k-1}(x)-T_{k-2}(x),\ k=0,\ 1,\ \cdots;\\ T_{-2}(x)=2x^2-1;\ T_{-1}(x)=x.\end{array}\right\}$$

对于任一数列$\{b_k\}_0^{n+2}$,其中 $b_{n+1}=b_{n+2}=0$, 我们有

$$-\sum_{k=0}^{n}b_kT_k(x)+2x\sum_{k=0}^{n}b_kT_{k-1}(x)-\sum_{k=0}^{n}b_kT_{k-2}(x)=0,$$

上式两端加上$\sum\limits_{k=0}^{n}{}'c_kT_k(x)$,再合并同类项有

$$\sum_{k=0}^{n}{}'c_kT_k(x)=b_0-b_1x-\frac{c_0}{2}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}(2xb_{k+1}-b_{k+2}-b_k+c_k)T_k(x).$$

现在,选择一组$\{b_k\}_0^n$满足(1.8),便有

$$\sum_{k=0}^{n}{}'c_kT_k(x)=\frac{1}{2}(2b_0-2b_1x-c_0),$$

利用 $b_0=2xb_1-b_2+c_0$,便得引理证明. 证毕.

在递推关系(1.8)中,当$|x|>\frac{1}{2}$时, 数值计算是不稳定的. Gentleman 曾对算法作了修改. 当 $x>0$ 时,将递推关系(1.8)写成

$$b_k-b_{k+1}=2(x-1)b_{k+1}+(b_{k+1}-b_{k+2})+c_k.$$

记 $d_k=b_k-b_{k+1}$,便有

$$\left.\begin{array}{l}d_k=2(x-1)b_{k+1}+d_{k+1}+c_k,\ 0<x\leqslant 1,\\ b_k=d_k+b_{k+1},\ k=n-1,\ \cdots,\ 0,\\ b_n=d_n=c_n;\\ y=\sum\limits_{k=0}^{n}{}'c_kT_k(x)=\frac{1}{2}(d_0+d_1).\end{array}\right\}\qquad(1.8)'$$

当 $x<0$ 时,记 $d_k=b_k+b_{k+1}$ 有

$$
\left.\begin{aligned}
&d_k=2(x+1)b_{k+1}-d_{k+1}+c_k,\quad -1\leqslant x<0,\\
&b_k=d_k-b_{k+1},\quad k=n-1,\ \cdots,\ 0,\\
&b_n=d_n=c_n;\\
&y=\sum_{k=0}^{n}{}'c_kT_k(x)=\frac{1}{2}(d_0-d_1).
\end{aligned}\right\}\qquad(1.8)''
$$

当 $x=0$ 时，可按(1.8)直接计算.

注意到，$T_n(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 有 n 个零点，即

$$
x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{n}\ \frac{\pi}{2}\right),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1,
$$

和在 $n+1$ 处达到极值，即

$$
z_k=\cos\frac{k\pi}{n},\ T_n(z_k)=(-1)^k,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n.
$$

引入内积

$$
(f,\ g)=\sum_{k=0}^{m}f(x_k)g(x_k),\tag{1.9}
$$

其中 x_k 为 $T_{m+1}(x)$ 的根，我们有

引理2 假定 $0\leqslant t,\ l\leqslant m$，对于契贝谢夫多项式 $T_t(x)$ 和内积定义(1.9)有

$$
(T_t,\ T_l)=\begin{cases}0 & t\neq l,\\ \dfrac{1}{2}(m+1) & t=l\neq 0,\\ m+1 & t=l=0.\end{cases}\tag{1.10}
$$

等式(1.10)称为契贝谢夫多项式离散形式的正交性质.

证明 记 $\cos\theta_k=x_k$，有

$$
\begin{aligned}
(T_t,\ T_l)&=\sum_{k=0}^{m}\cos t\theta_k\cos l\theta_k\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}(\cos(t-l)\theta_k+\cos(t+l)\theta_k),
\end{aligned}
$$

由复数求和形式有

$$(T_t,\ T_l)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{m}e^{i(t-l)\theta_k}+\sum_{k=0}^{m}e^{i(t+l)\theta_k}\right).$$

记 $h=\frac{\pi}{m+1}$，有 $\theta_k=\left(\frac{1}{2}+k\right)h$，上式右端是几何级数求和，即

$$\sum_{k=0}^{m}e^{i(t\pm l)(\frac{1}{2}+k)h}=e^{i(t\pm l)\frac{h}{2}}\sum_{k=0}^{m}e^{i(t\pm l)kh}.$$

又记 $q=e^{i(t\pm l)h}$，当 $t\neq l$ 时，

$$0<|(t\pm l)h|\leqslant 2m\frac{\pi}{m+1}<2\pi,$$

所以 $q\neq 1$. 从而

$$\begin{aligned}e^{i(t\pm l)\frac{h}{2}}\sum_{k=0}^{m}e^{i(t\pm l)kh}&=e^{i(t\pm l)\frac{h}{2}}\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\\&=\frac{1-e^{i(t\pm l)\pi}}{-2i\sin(t\pm l)\frac{h}{2}}\\&=\frac{(-1)^{(t\pm l)}-1}{-2\sin(t\pm l)\frac{h}{2}}i.\end{aligned}$$

上式实数部分为零，故当 $t\neq l$ 时 $(T_t,\ T_l)=0$；当 $t=l=0$ 时

$$(T_t,\ T_l)=\sum_{k=0}^{m}\cos t\theta_k\cos l\theta_k=m+1;$$

而当 $t=l\neq 0$ 时，注意

$$\sum_{k=0}^{m}\cos 2l\theta_k=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}e^{i\frac{(2k+1)\pi l}{m+1}}=0,$$

便有 $(T_t,\ T_l)=\frac{m+1}{2}$. 证毕.

如果，我们引入新的内积符号

$$(f,\ g)=\sum_{k=0}^{m}{}''f(z_k)g(z_k),\tag{1.9$'$}$$

这里 z_k 是 m 次契贝谢夫多项式 $T_m(x)$ 的极值点，即 $z_k=$

$\cos\frac{k\pi}{m}$. 而 $\sum''$ 代表求和的首项和末项要除以 1/2. 我们同样有

引理 3 假定 $0\leqslant t, l\leqslant m$, 对于契贝谢夫多项式 T_t 和内积定义(1.9)′有

$$(T_t, T_l)=\begin{cases}0, & t\neq l,\\ \frac{m}{2}, & t=l\neq 0,\\ m, & t=l=0.\end{cases} \qquad (1.10)'$$

有了引理 2、3, 我们来讨论曲线拟合问题. 假定给定一组观测数据

$$(x_k, f_k),\ k=0, 1, \cdots, m,$$

这里 x_k 是 $T_{m+1}(x)$ 的零点; 以契贝谢夫多项式 $\{T_i(x)\}_0^n$ 为基 $(n\leqslant m)$, 建立曲线模型

$$y=F(\underset{\sim}{c}, x)=\sum_{i=0}^{n}{}'c_iT_i(x), \qquad (1.11)$$

选择常数 c_i 使

$$\sum_{k=0}^{m}\left(f_k-\sum_{i=0}^{n}{}'c_iT_i(x_k)\right)^2=\min. \qquad (1.12)$$

由离散情况的最小二乘法, c_i 满足下列方程组

$$\begin{pmatrix}(T_0, T_0) & (T_0, T_1) & \cdots & (T_0, T_n)\\ (T_1, T_0) & (T_1, T_1) & \cdots & (T_1, T_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (T_n, T_0) & (T_n, T_1) & \cdots & (T_n, T_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{c_0}{2}\\ c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f, T_0)\\ (f, T_1)\\ \vdots\\ (f, T_n)\end{pmatrix},$$

再据引理 2, 便求得

$$c_i=\frac{2\sum_{k=0}^{m}f_kT_i(x_k)}{m+1}, \ i=0, 1, \cdots, n. \qquad (1.13)$$

特别地，我们有

引理 4 如果 $m=n$，则下列插值问题

$$\sum_{i=0}^{n}{}' c_i T_i(x_k)=f(x_k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n \qquad (1.14)$$

的解是存在、唯一的，且 c_i 由(1.13)给出.

由于契贝谢夫多项式具有多种形式的离散正交性(例如引理 3)，因而应用起来更灵活. 实际上，选取契贝谢夫多项式零点作为插值节点，效果是卓绝的，M. J. D. Powell 指出了下列结果.

假定 $f\in c[-1,\ 1]$，对于插值问题(1.14)有

$$\left\| f-\sum_{i=0}^{n}{}' c_i T_i(x) \right\|_\infty \leqslant c_n E_n(f),$$

这里 $E_n(f)=\min\limits_{a_i}\max\limits_{-1<x<1}\left| f(x)-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \right|$. 当 $n\leqslant 20$ 时 $c_n=4$，当 $n\leqslant 100$ 时 $c_n=5$. 当 n 充分大时 $c_n\approx\dfrac{2}{\pi}\ln n$.

利用 Jackson 定理，便可得到插值问题(1.14)的更精确估计.

假定 $f(x)\in C^k[-1,\ 1]$，则有

$$E_n(f)\leqslant\frac{\|f^{(k)}\|_\infty(\pi/2)^k}{(n+1)n\cdots(n-k+2)},\quad n\geqslant k.$$

即 $E_n(f)=O(n^{-k})$，$n\to\infty$.

选取契贝谢夫多项式作基函数，不但具有最小二乘法和插值法的自适应性，而且还有选取基函数个数的自适应性. 利用正交性质，Shampine 于 1975 年指出了 c_k 的一个公式

$$c_k=\frac{(s_{k-1},\ T_k)}{\|T_k\|^2}, \qquad (1.15)$$

其中

$$s_{k-1}(x_l)=f(x_l)-\sum_{i=0}^{k-1}{}' c_i T_i(x_l), \qquad (1.15)'$$

表示拟合的误差. 由许瓦兹公式有

$$|c_k| \leqslant \sqrt{\frac{2\sum_{l=0}^{m} s_{k-1}^2(x_l)}{m+1}},$$

因而，如果 $\sum_{i=0}^{k-1} c_i T_i(x)$ 的拟合效果好，c_k 的系数便趋于零，即可由 $|c_k|$ 的大小判别计算是否停止.

1-3 自适应的指数函数拟合法

对于一类实验数据，它们之间呈现着指数并含有振荡的特征，在这种情况下，选取指数函数、三角函数、多项式为基函数是合适的. 下面，叙述具体作法. 首先，通过观测数据 (k, f_k), $k=0, 1, \cdots, m$ 将首项系数为 1 的 n 次代数方程

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (1.16)$$

的系数 a_i(均系实数)$i=1, 2, \cdots, n$ 确定下来. 这里 $m\geqslant 2n-1$. 类似于 n 阶常系数常微分方程的通解构造，称(1.16)为拟合曲线的特征方程. 我们将通过根的不同情况作出基函数的不同选择. 也即是说，我们将曲线拟合的特征方程(1.16)的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的 x 次方作为基函数，即将曲线模型选为

$$y=c_1\lambda_1^x+c_2\lambda_2^x+\cdots+c_n\lambda_n^x. \qquad (1.17)$$

下面针对不同特征根，类似于高阶常系数常微分方程通解的构造，将 λ_i^x 确定下来.

(i) **特征根是单根情况.** 假定特征方程(1.16)有 n 个互异的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 如果所有 $\lambda_i>0$, 那末 $\lambda_i^x=e^{x\ln\lambda_i}$; 如果某一个 $\lambda_i<0$, 则

$$\lambda_i^x=(-1)^x|\lambda_i|^x=(\cos\pi x+i\sin\pi x)e^{x\ln|\lambda_i|},$$

考虑到实数解，仅取实数部分，即取 $\lambda_i^x=\cos\pi x e^{x\ln|\lambda_i|}$ 作为基函数；如果 λ_i 是复根，假定 λ_{i+1} 是它的共轭复根，

$$\lambda_i=\rho_i(\cos\theta_i+i\sin\theta_i),$$

类似于微分方程的讨论．我们将基函数取成 λ_i^x 的实数和复数部分，即

$$\lambda_i^x = e^{x\ln\rho_i}\cos\theta_i x, \quad \lambda_{i+1}^x = e^{x\ln\rho_i}\sin\theta_i x.$$

(ii) **方程(1.16)有 k 重根情况．**假定

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+k-1} \neq \lambda_{i+k}.$$

则将 $\lambda_i^x, \cdots, \lambda_{i+k-1}^x$ 取成

$$\lambda_i^x = \lambda_i^x,\ \lambda_{i+1}^x = x\lambda_i^x,\ \cdots,\ \lambda_{i+k-1}^x = x(x-1)\cdots(x-k+2)\lambda_i^x.$$

(iii) **方程(1.16)有零根．**例如 $\lambda_n = 0$，将基函数减少一个．如果有 k 重零根，则将基函数减少 k 个．

下面，我们来确定特征方程(1.16)的系数．在(1.17)中，令 x 等于 $k+l$，这里 k, l 均系正整数，两端乘以 a_{n-k}，并对 k 从 0 到 n 求和，利用(1.16)，令 $y(k+l) = f_{k+l}$，$a_0 = 1$，便有

$$\sum_{k=0}^{n} f_{k+l}a_{n-k} = 0, \quad l = 0, 1, \cdots, n.$$

于是 $a_1, \cdots, a_n$ 由下列线性代数方程组决定：

$$\left.\begin{aligned} &f_{n-1}a_1 + f_{n-2}a_2 + \cdots + f_0 a_n = -f_n, \\ &f_n a_1 + f_{n+1}a_2 + \cdots + f_1 a_n = -f_{n+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &f_{m-1}a_1 + f_{m-2}a_2 + \cdots + f_{m-n}a_n = -f_m. \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

写成矩阵形式有

$$AX = b, \tag{1.18$'$}$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m-n} & f_{m-n+1} & \cdots & f_{m-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad b = -\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

如果 $m = 2n-1$，且 $\det A \neq 0$，那末可用 Gauss 消去法求得 X 的解；如果 $m > 2n-1$，则可用最小二乘法求解(1.18)′.

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 确定后，我们通过(1.17)将拟合曲线的参数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 确定下来：

$$\left.\begin{aligned} &c_1+c_2+\cdots+c_n=f_0,\\ &c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\cdots+c_n\lambda_n=f_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &c_1\lambda_1^m+c_2\lambda_2^m+\cdots+c_n\lambda_n^m=f_m. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

由于 $m\geqslant 2n-1$，故宜采用最小二乘法求解(1.19)．

上述处理方法称为 Prony 技巧，它将半线性逼近问题转化为二个线性逼近问题．第一步，利用已给数据选择好基函数，这一步包括解一个线性方程组和一个高次方程．第二步，再一次利用观测数据将线性逼近参数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 确定下来．

下面，利用 Prony 技巧研究二种特殊情况．

第一种情况，当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 趋向定值．这时，将曲线拟合模型取成

$$y=c_0+c_1\lambda_1^x+\cdots+c_n\lambda_n^x. \tag{1.20}$$

记 $\Delta y=y(x+1)-y(x)$，则可将(1.20)化成

$$\Delta y=c_1'\lambda_1^x+c_2'\lambda_2^x+\cdots+c_n'\lambda_n^x. \tag{1.20$'$}$$

利用(1.18)、(1.16)将 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 确定下来．进一步由(1.20)确定 $c_0, c_1, \cdots, c_n$．

第二种情况，如函数 $f(x)$ 由不同的周期 $\frac{2\pi}{\omega_1}, \cdots, \frac{2\pi}{\omega_l}$ 迭加而成，则将拟合曲线取成

$$y=A_1\cos\omega_1x+B_1\sin\omega_1x+\cdots+A_l\cos\omega_lx+B_l\sin\omega_lx. \tag{1.21}$$

应用 Prony 技巧，$\lambda=e^{i\omega_j}$，在(1.16)中令 $n=2l$，注意到 $\frac{1}{\lambda}$ 也是根，因而 $a_{2l-1}=a_1, \cdots, a_{l+1}=a_{l-1}, a_{2l}=1$，故

$$e^{i2l\omega_j}+a_1e^{i(2l-1)\omega_j}+\cdots+a_{l-1}e^{i(l+1)\omega_j}+a_le^{il\omega_j}$$
$$+a_{l-1}e^{i(l-1)\omega_j}+\cdots+a_1e^{i\omega_j}+1=0.$$

合并同类项整理之有

$$2\cos l\omega_j+2a_1\cos(l-1)\omega_j+\cdots+2a_{l-1}\cos\omega_j+a_l=0,$$

这时，(1.16)可写成契贝谢夫多项式形式:

$$T_l(x)+a_1T_{l-1}(x)+\cdots+a_{l-1}T_1(x)+\frac{1}{2}a_l=0,$$

其中 $x=\cos\omega$.

而方程组(1.18)变成

$$\left.\begin{aligned}&(f_1+f_{2l-1})a_1+(f_2+f_{2l-2})a_2+\cdots\\&\quad+(f_{l-1}+f_{l+1})a_{l-1}+f_la_l=-(f_0+f_{2l}),\\&(f_2+f_{2l})a_1+(f_3+f_{2l-1})a_2+\cdots\\&\quad+(f_l+f_{l+2})a_{l-1}+f_{l+1}a_l=-(f_1+f_{2l+1}),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&(f_{m-2l+1}+f_{m-1})a_1+(f_{m-2l+2}+f_{m-2})a_2+\cdots\\&\quad+(f_{m-l-1}+f_{m-l+1})a_{l-1}+f_{m-l}a_l=-(f_{m-2l}+f_m).\end{aligned}\right\}$$

这里，$m\geqslant 3l+1$. 进一步，利用通常的方法将线性逼近参数 A_l, B_l 确定下来.

在本节的末尾，我们指出，Prony 技巧的一个缺点，是没有再生性，但数值例子表明，它有近似的再生性. 例如，对于函数

$$f(x)=2.32-1.08\,e^{-x}+1.20\,e^{-2x},$$

取表格函数

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2.4400	2.0851	2.1958	2.2692	2.3006

在运算中保留小数后二位数字，求得特征方程

$$183\lambda^2-91\lambda+8=0,$$

其根 $\lambda_1\approx0.383$, $\lambda_2\approx0.114$. 从而
拟合模型

$$y=F(\varrho, x)=c_0+c_1(0.383)^x+c_2(0.114)^x$$
$$=c_0+c_1e^{-0.96x}+c_2e^{-2.18x},$$

这便说明拟合模型的基函数有近似再生性. 基函数确定后，按通常线性逼近的方法，将参数 c_0、c_1、c_2 确定下来。

§2 曲线拟合和常微分方程反问题

从 Prony 技巧中，我们得到启发，如果将曲线拟合的基函数看成是某一个待确定参数的常微分方程的基解组，那末，便成为求解常微分方程的反问题。一般讲来，由物理、力学所描述的规律由微分方程所表示，通过观测数据将微分方程的参数确定下来，进而将基解组作为曲线拟合的基函数. 最后，运用一般线性逼近方法将拟合曲线确定下来. 这个方法的一个重要优点是有一定的自适应性，从数学上讲，它是解决半线性逼近的重要方法. 我们从一个实际问题分析起. 在实验数据的拟合中，常常选择半线性逼近模型

$$y=ae^{kx}+be^{-kx} \qquad (\text{具有指数特征}),$$
$$y=a\cos kx+b\sin kx \qquad (\text{周期特征}).$$

上述模型的半线性逼近参数 k 通常是利用非线性最小二乘法确定下来. 但运算量是很大的. 现在，我们将 e^{kx}、e^{-kx} 及 $\cos kx$、$\sin kx$ 理解为二阶常系数微分方程的基解组，即

$$y''+\alpha y=0,$$

α 是待定常数，它由观测数据(x_r, f_r), $r=0, 1, \cdots, m+1$ 所确定. 这里 $y=f(x)$ 是 $y''+\alpha y=0$ 的解，记 $y_r=f(x_r)=f_r$, x_r 是等距分布的，步长为 h, 即 $x_r=a+rh$. 也即是说，我们求

解下列常微分方程的反问题：

$$\left.\begin{array}{ll} y''+\alpha y=0, & a\leqslant x\leqslant b, \\ y(x_r)=f(x_r), & r=0,\ 1,\ \cdots,\ m+1. \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

将微分方程离散化后，α 便由下列超定方程组所确定

$$\alpha h^2 y_r=-\Delta^2 y_{r-1},\quad r=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \tag{2.2}$$

这里 $\Delta^2 y_{r-1}=y_{r+1}-2y_r+y_{r-1}$. 我们用最小二乘法求解(2.2)，即求 α 使

$$I(\alpha)=\sum_{r=1}^{m}(\alpha h^2 y_r+\Delta^2 y_{r-1})^2 \triangleq \min. \tag{2.3}$$

令 $I'(\alpha)=0$, 求得

$$\alpha=\frac{-\sum\limits_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1}}{h^2\sum\limits_{r=1}^{m} y_r^2}, \tag{2.4}$$

由(2.4)容易看出，当 $y=f(x)$ 是线性函数时，有 $\Delta^2 y_{r-1}\equiv 0$, 故 $\alpha=0$, 从而微分方程变成 $y''=0$, 即 $y=ax+b$, 从而反解问题(2.1)对线性函数具有再生特征. 如果

$$y=f(x)=a\cos kx+b\sin kx,$$

那末，由于 α 的分母恒正，而当 h 充分小时

$$\frac{-\sum\limits_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1}}{h}\approx -\int_a^b yy''dx=k^2\int_a^b y^2 dx>0,$$

故 $\alpha>0$, 从而 $y''+\alpha y=0$ 的特征根是复共轭的，或即是说(2.1)具有近似再生性质. 而当曲线 $y=f(x)=ae^{kx}+be^{-kx}$ 时，容易导得

$$\frac{-\sum\limits_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1}}{h}=-\int_a^b yy''dx=-k^2\int_a^b y^2 dx,$$

故 $\alpha<0$, 从而反解问题(2.1)对指数曲线也有近似再生性质. 实际上，当 h 充分小时

$$\alpha=\frac{-\sum_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1}}{h^2 \sum_{r=1}^{m} y_r^2} \approx \frac{-\int_a^b yy'' dx}{\int_a^b y^2 dx} \approx \pm k^2.$$

式中，若 $f(x)=ae^{kx}+be^{-kx}$，则取负号；若

$$f(x)=a\cos kx+b\sin kx,$$

则取正号．注意到求积公式的准确度，容易看到 α 逼近 $\pm k^2$ 的误差为 $O(h)$，换言之，反问题(2.1)具有 $O(h)$ 的近似的再生性质．事实上，泛函

$$L_1 y=\int_a^b yy'' dx-\frac{\sum_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1}}{h}$$

的代数精度为1，故由 Peano 核定理有

$$L_1 y=\int_a^b L_1(\cdot-t)_+ f''(t)dt,$$

注意到 $\int_a^b yy''dx=yy'\Big|_a^b-\int_a^b y'^2 dx$，有

$$\begin{aligned}L_1(\cdot-t)_+&=(x-t)_+\Big|_a^b-\int_a^b (x-t)_t^0 dx\\&\quad-\frac{1}{h}\sum_{r=1}^{m}(x_r-t)_+\Delta^2(x_{r-1}-t)_+\\&=-\frac{1}{h}\sum_{r=1}^{m}(x_r-t)_+\Delta^2(x_{r-1}-t)_+,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}L_1 y&=-\frac{1}{h}\sum_{r=1}^{m}\int_a^{x_r}(x_r-t)_+\Delta^2(x_{r-1}-t)_+ f''(t)dt\\&=-\frac{1}{h}\sum_{r=1}^{m}\int_{x_{r-1}}^{x_r}(x_r-t)((x_{r+1}-t)-2(x_r-t))f''(t)dt\\&=-\frac{1}{h}\sum_{r=1}^{m}\int_{x_{r-1}}^{x_r}(x_r-t)(t-x_{r-1})f''(t)dt.\end{aligned}$$

再注意到核函数不变号，又有

$$L_1y=\frac{h^2}{6}\sum_{r=1}^{m} f''(\xi_r)=O(h),$$

同理
$$L_2y=\int_a^b y^2dx-\sum_{r=1}^{m} y_r^2h=O(h).$$

于是
$$\alpha=\frac{-\int_a^b yy''dx}{\int_a^b y^2dx}+O(h)=\pm k^2+O(h).$$

例 1 给定函数表(如表 1)试找曲线拟合的基函数.

表 1

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41075	0.52110	0.63665	0.75858

解 确定反解问题(2.1)的系数 α, 为此作二次差分表如下

表 2 (Σ 表示对该列求和)

x	y_r	y_r^2	Δy_{r-1}	$\Delta^2 y_{r-1}$	$y_r\Delta^2 y_{r-1}$
0	0.00000				
0.1	0.10017	0.010034	0.10017	0.00100	0.010017×10^{-2}
0.2	0.20134	0.0405377	0.10117	0.00201	0.0404693×10^{-2}
0.3	0.30452	0.0927324	0.10318	0.00305	0.0928786×10^{-2}
0.4	0.41075	0.1687155	0.10623	0.00412	0.169229×10^{-2}
0.5	0.52110	0.2715452	0.11035	0.00520	0.270972×10^{-2}
0.6	0.63665	0.4053232	0.11555	0.00638	0.4061827×10^{-2}
0.7	0.75858		0.12193		
Σ		0.988888			0.9897486×10^{-2}

注意到 $h=0.1$, 由表 2 有

$$\alpha=-\frac{\sum_{r=1}^{6} y_r\Delta^2 y_{r-1}}{h^2\sum_{r=1}^{6} y_r^2}=-\frac{0.9897486}{0.988888}=-1.0008702.$$

于是可取$e^{\sqrt{\alpha}x}$，$e^{-\sqrt{|\alpha|}x}$为拟合曲线的基，又$\sqrt{|\alpha|}=1.0004$，即拟合模型为

$$y=c_1e^{1.0004x}+c_2e^{-1.0004x}.$$

实际上，函数表1是由双曲正弦函数

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

产生的，可见，利用反问题求得的基函数确有近似再生的特征。

下面，我们研究二阶常系数常微分方程一般形式的反问题：

$$\left.\begin{array}{l} y''+\alpha y'+\beta y=0, \quad a\leqslant x\leqslant b, \ \alpha,\ \beta\text{为待定常数}, \\ y(x_r)=y_r=f(x_r), \quad r=0,\ 1,\ \cdots,\ m+1. \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

同理，将(2.5)离散化，记$\delta y_k=y_{k+1}-y_{k-1}$，便得到关于$\alpha$，$\beta$的超定方程组：

$$\alpha\frac{\delta y_r}{2h}+\beta y_r=-\frac{1}{h^2}\Delta^2 y_{r-1}, \ r=1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{2.6}$$

利用最小二乘法，将α、β确定下来，即求α，β使

$$I(\alpha,\ \beta)=\sum_{r=1}^{m}\left(\alpha\frac{\delta y_r}{2h}+\beta y_r+\frac{\Delta^2 y_{r-1}}{h^2}\right)^2=\min, \tag{2.6$'$}$$

记

$$X_1=\frac{1}{2h}\begin{pmatrix}\delta y_1\\ \delta y_2\\ \vdots\\ \delta y_m\end{pmatrix}, \quad X_2=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}, \quad Y=\frac{-1}{h^2}\begin{pmatrix}\Delta^2 y_1\\ \Delta^2 y_2\\ \vdots\\ \Delta^2 y_m\end{pmatrix},$$

便有
$$\left.\begin{array}{l}(X_1,\ X_1)\alpha+(X_1,\ X_2)\beta=(X_1,\ Y), \\ (X_2,\ X_1)\alpha+(X_2,\ X_2)\beta=(X_2,\ Y).\end{array}\right\}$$

或即

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\begin{vmatrix} (X_1, Y) & (X_1, X_2) \\ (X_2, Y) & (X_2, X_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (X_1, X_1) & (X_1, X_2) \\ (X_2, X_1) & (X_2, X_2) \end{vmatrix}}, \\
\beta &= \frac{\begin{vmatrix} (X_1, X_1) & (X_1, Y) \\ (X_2, X_1) & (X_2, Y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (X_1, X_1) & (X_1, X_2) \\ (X_2, X_1) & (X_2, X_2) \end{vmatrix}}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}
$$

这里，我们假定(2.7)中α、β的分母不等于零. 整理(2.7)式得

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha = 2\Big[& \sum_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1} \sum_{r=1}^{m} y_r \delta y_r \\
& + (\Delta y_0 + \Delta y_m)(\Delta y_0 - \Delta y_m) \sum_{r=1}^{m} y_r^2 \Big] \\
\times \Big[& h \Big(\sum_{r=1}^{m} (\delta y_r)^2 \sum_{r=1}^{m} y_r^2 \\
& - \Big(\sum_{r=1}^{m} y_r \delta y_r \Big)^2 \Big) \Big]^{-1}, \\
\beta = \Big[& (\Delta y_m + \Delta y_0)(\Delta y_m - \Delta y_0) \sum_{r=1}^{m} y_r \delta y_r \\
& - \sum_{r=1}^{m} (\delta y_r)^2 \sum_{r=1}^{m} y_r \Delta^2 y_{r-1} \Big] \\
\times \Big[& h^2 \Big(\sum_{r=1}^{m} (\delta y_r)^2 \sum_{r=1}^{m} y_r^2 \\
& - \Big(\sum_{r=1}^{m} y_r \delta y_r \Big)^2 \Big) \Big]^{-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.7'}
$$

例 2 给定函数$y=f(x)$的一个表(表 3)，试决定拟合函数的基函数.

表 3

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	3.00000	2.90484	2.81873	2.74082	2.67032	2.60653	2.54881	2.49659

解 造差分表如下

表4 （Σ表示对该列求和）

x	y_r	y_r^2	δy_r	$\Delta^2 y_{r-1}$	$(\delta y_r)^2$	$y_r\delta y_r$	$y_r\Delta^2 y_{r-1}$
0	3.00000						
0.1	2.90484	8.4380954	−0.18127	0.00905	0.0328588	−0.5265549	0.0262888
0.2	2.81873	7.9452388	−0.16402	0.00820	0.0269025	−0.462328	0.0231135
0.3	2.47082	7.5120942	−0.14841	0.00741	0.0220255	−0.406765	0.0203094
0.4	2.67032	7.1306089	−0.13429	0.00671	0.0180338	−0.3585972	0.0179178
0.5	2.60653	6.7939986	−0.12151	0.00607	0.0147646	−0.3167194	0.0158216
0.6	2.54881	6.4964324	−0.10994	0.00550		−0.2802161	0.0140184
0.7	2.49659						
Σ		44.316466			0.126672	−2.3511806	0.1174695

由(2.7)′求得

$$\alpha=0.9953425,\qquad \beta=-0.0010338,$$

而微分方程的特征方程为

$$\lambda^2+0.9953425\lambda-0.0010338=0.$$

求得根 $\qquad \lambda_1=-0.9964,\qquad \lambda_2=0.00105.$

而拟合曲线模型为

$$y=F(\underset{\sim}{c},\ x)=c_1e^{0.00105x}+c_2e^{-0.9964x}.$$

事实上，表3由函数 $2+e^{-x}$ 产生，由此可见上述方法是有效的。由(2.7)容易看出，当 $f(x)$ 等于线性函数时，$\alpha=\beta=0$，从而反解问题(2.5)对线性函数具有再生性质。

对于一般的 n 阶常系数微分方程

$$Ly=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0. \tag{2.8}$$

将微分算子离散化即 $Ly\approx l_hy$，l_hy 中包含了 a_1，…，a_n 的线性关系式，令 $l_hy=0$ 便得到了关于 a_1，…，a_n 的代数方程组，解这组方程便将 a_1，…，a_n 确定下来，进而由 $Ly=0$ 求得拟

合函数的基函数.

例如，令
$$y^{(k)}\approx\frac{\delta^k y}{(2h)^k},$$
便得到关于 $a_1, \cdots, a_n$ 的代数方程组

$$\frac{\delta^n y_i}{(2h)^n}+a_1\frac{\delta^{n-1}y_i}{(2h)^{n-1}}+a_2\frac{\delta^{n-2}y_i}{(2h)^{n-2}}+\cdots$$
$$+a_{n-1}\frac{\delta y_i}{2h}+a_n y_i=0, \tag{2.9}$$
$$i=n,\ n+1,\ \cdots,\ m-n+1.$$

记
$$X_i=\frac{1}{(2h)^{n-i}}\begin{pmatrix}\delta^{n-i}y_n\\ \delta^{n-i}y_{n+1}\\ \vdots\\ \delta^{n-i}y_{m-n+1}\end{pmatrix},\quad Y=\frac{-1}{(2h)^n}\begin{pmatrix}\delta^n y_n\\ \delta^n y_{n+1}\\ \vdots\\ \delta^n y_{m-n+1}\end{pmatrix},$$
假定 $m+1\geqslant 3n-1$，用最小二乘法求解(2.9)，即
$$\begin{pmatrix}(X_1, X_1) & (X_1, X_2) & \cdots & (X_1, X_n)\\ (X_2, X_1) & (X_2, X_2) & \cdots & (X_2, X_n)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ (X_n, X_1) & (X_n, X_2) & \cdots & (X_n, X_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(X_1, Y)\\ (X_2, Y)\\ \vdots\\ (X_n, Y)\end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

我们仍假定(2.10)的行列式不等于0，并且看到当 $f(x)$ 是 $n-1$ 次多项式时，恒有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，从而(2.8)成为 $y^{(n)}=0$，即反解问题对 $n-1$ 次多项式具有再生性质，从这一点讲，比 Prony 方法优越*. 让我们再举一个例子说明这一问题的应用.

例 3 给定 $f(x)$ 的一个表(表 5)，试找出拟合函数的基函数.

---

* 在求解(2.9)中，如果 $a_n=0$，我们类似于常微分方程降阶方法一样，将差分降低一阶，再求解 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 如此等等.

表 5

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1.00000	1.10017	1.20134	1.30452	1.41075
x	0.5	0.6	0.7	0.8	
y	1.52110	1.63665	1.75858	1.88811	

解 应用反解问题，我们来确定一个三阶常系数常微分方程的系数．即取基函数满足微分方程

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2y^1+a_3=0.$$

由表 5，确定参数 a_1, a_2, a_3．为此造中心差分表(表 6)．

表 6

x	y_r	δy_r	$\delta^2 y_r$	$\delta^3 y_r$
0.0	1.00000			
0.1	1.10017	0.20134		
0.2	1.20134	0.20435	0.0807×10^{-1}	
0.3	1.30452	0.20941	0.1223×10^{-1}	0.0842×10^{-1}
0.4	1.41075	0.21658	0.1649×10^{-1}	0.0867×10^{-1}
0.5	1.52110	0.22590	0.2090×10^{-1}	0.0907×10^{-1}
0.6	1.63665	0.23748	0.2556×10^{-1}	
0.7	1.75858	0.25146		
0.8	1.88811			

由(2.9)知，方程阶数 $n=3$，实测数据 $m+1=8$，$h=0.1$，a_1, a_2, a_3 由下列代数方程组确定

$$\left.\begin{aligned}
a_1\frac{\delta^2y_3}{(2h)^2}+a_2\frac{\delta y_3}{2h}+a_3y_3&=-\frac{\delta^3y_3}{(2h)^3},\\
a_1\frac{\delta^2y_4}{(2h)^2}+a_2\frac{\delta y_4}{2h}+a_3y_4&=-\frac{\delta^3y_4}{(2h)^3},\\
a_1\frac{\delta^2y_5}{(2h)^2}+a_2\frac{\delta y_5}{2h}+a_3y_5&=-\frac{\delta^3y_5}{(2h)^3}.
\end{aligned}\right\}$$

上述方程的个数恰好等于未知数的个数，故可直接求得 a_1,

a_2, a_3 的解。将各式遍乘 8000 并利用表 6 有

$$\left.\begin{aligned}0.2446a_1+0.83764a_2+10.43616a_3&=-0.842,\\0.3298a_1+0.86632a_2+11.286a_3&=-0.867,\\0.418a_1+0.9036a_2+12.1688a_3&=-0.907.\end{aligned}\right\}$$

由此求得

$$a_1=-0.4791134,$$
$$a_2=-1.8932849,$$
$$a_3=0.0825095.$$

而微分方程的特征根满足

$$\lambda^3-0.4791134\lambda^2-1.8932849\lambda+0.0825095=0,$$

容易判别方程有三个实根，且可求得

$$\lambda_1\approx0.14,\quad \lambda_2\approx1.57,\quad \lambda_3\approx-1.24.$$

从而求得拟合曲线的基函数，即

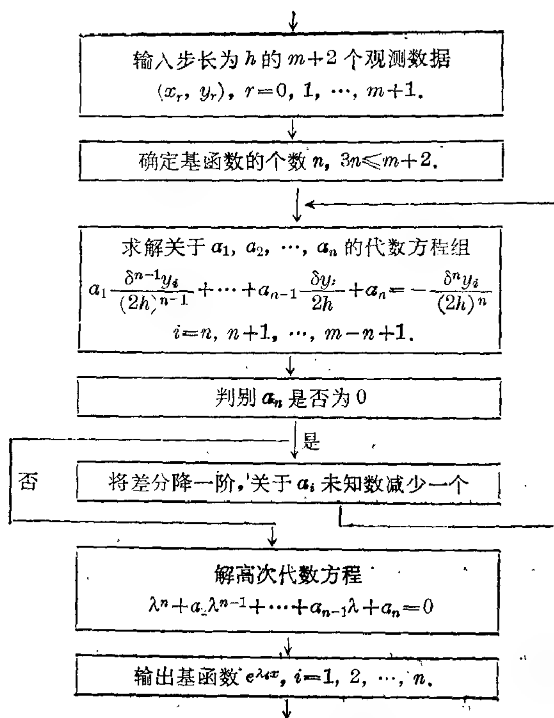
$$y=c_1e^{0.14x}+c_2e^{1.57x}+c_3e^{-1.24x}.$$

实际上，表 5 是由函数 $1+e^x+e^{-x}$ 产生的，由此可知方法是有效的。

一般讲，在曲线拟合问题中，寻找基函数是不容易的，著者将常微分方程反解问题应用到这一问题中来，提出了构造基函数的数值方法，所举的三个例子都是吻合的。实际问题中，还可在初选基础上对特征根进行修改，使基函数更精确。我们所提的方法，对具有微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

基解组特征，也即是具有 $p(x)e^{\lambda x}$, $q(x)\cos kx$, $q(x)\sin kx$ 及其组合的一类很广的曲线类具有近似再生性（特别，对多项式来讲具有再生性）。从理论上讲，将半线性逼近问题转化成一个高次方程的求根问题，而这个高次方程的系数是由一个超定线性代数方程组所确定。从而，一个曲线拟合的模型可由下列框图实现。



§3 受不等式约束的样条插值

三次插值样条在曲线构造中有着异常重要的位置。这里，感兴趣的问题有下列几点：

(i) 样条结点应取多少个？也即是说样条函数空间维数应等于多少才合适.

(ii) 样条结点应怎样分布才合理？如果将样条结点的选取当作逼近的参数，那末，问题转化成半线性问题的逼近.

(iii) 边界条件应怎样确定。在一类实验数据中，边界的

导数是无法给出的，我们将用减少结点的方法来处理这个问题.

(iv) 内点插值条件应怎样提才有更大的灵活适应性. 为此，提出受不等式约束的三次样条插值，它能适应工程设计的需要. 此类问题的推广将导致希氏空间凸集上的插值样条.

本节将就这几个问题作一概述.

3-1 边界和结点的处理

给定$[a, b]$的一个分划

$$\pi: \ a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,$$

假定$s(x)\in c^2[a, b]$，且在每个子区间(x_{i-1}, x_i) $(i=1, 2, \cdots, N)$上是不超过三次的代数多项式. 全体$s(x)$构成了$N+3$维线性空间. 插值问题提法如下:

$$s(x_i)=f(x_i), \quad i=0, 1, \cdots, N. \tag{3.1}$$

由于$s(x)$有$N+3$个自由度，还需在边界点x_0、x_N上适当补充两个条件.

下面，我们寻求$s(x)$表达式. 如果$s'(x_i)$、$s'(x_{i+1})$求得，则由 Hermite 插值，$s(x)$在(x_i, x_{i+1})上的表达式能唯一确定下来. 而$s'(x_i)$满足著名的三转角方程

$$\left.\begin{aligned} &h_i s'(x_{i-1})+2(h_i+h_{i-1})s'(x_i)+h_{i-1}s'(x_{i+1})=b_i,\\ &\qquad h_i=x_{i+1}-x_i,\\ &b_i=3(h_i[x_{i-1}, x_i]f+h_{i-1}[x_i, x_{i+1}]f),\\ &\qquad i=1, 2, \cdots, N-1. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

另一方面，$s(x)$在(x_{i-1}, x_i)上的表达式也可由重节点 Newton 差商公式给出，即有

$$\begin{aligned} s(x)=&s(x_i)+(x-x_i)s'(x_i)+(x-x_i)^2[x_i, x_i, x_{i+1}]s\\ &+(x-x_i)^2(x-x_{i+1})[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]s. \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $$[x_i,\ x_i,\ x_{i+1}]s=\frac{[x_i,\ x_{i+1}]s-s'(x_i)}{h_i},$$

$$[x_i,\ x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1}]s=\frac{s'(x_i)+s'(x_{i+1})-2[x_i,\ x_{i+1}]s}{h_i^2}.$$

(i) 如果$f'(x_0)$, $f'(x_N)$已给,那么在(3.2)中补充插值条件

$$s'(x_0)=f'(x_0),\ s'(x_N)=f'(x_N). \tag{3.4}$$

(ii) 如果$f''(x_0)$, $f''(x_N)$已给,对(3.3)求二次导数并在$x=x_0$、x_N处令其等于$f''(x_0)$、$f''(x_N)$便导得插值条件

$$\left.\begin{aligned}2s'(x_0)+s'(x_1)&=3[x_0,\ x_1]f-h_0f''(x_0)/2!,\\2s'(x_{N-1})+s'(x_N)&=3[x_{N-1},x_N]f-h_{N-1}f''(x_N)/2!.\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

(iii) 对于一类实验数据，除了插值条件$s(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,\cdots,N$外不能再增加端点的条件．为了解出(3.2)，只需去掉样条结点x_1、x_{N-1}．这时三阶导数$s'''(x)$通过x_1和x_{N-1}时要保持连续,由(3.3)有

$$[x_0,\ x_0,\ x_1,\ x_1]s=[x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2]s,$$

$$[x_N,\ x_N,\ x_{N-1},\ x_{N-1}]s=[x_{N-1},\ x_{N-1},\ x_{N-2},\ x_{N-2}]s.$$

再由(3.2)令$i=1,N-1$并与上式联立消去$s'(x_2)$和$s'(x_{N-2})$，便导致附加的插值条件:

$$\left.\begin{aligned}&s'(x_0)h_1+(h_0+h_1)s'(x_1)\\&=\frac{(h_0+2(h_0+h_1))h_1[x_0,\ x_1]f+h_0^2[x_1,x_2]f}{h_0+h_1},\\&s'(x_{N-1})(h_{N-1}+h_{N-2})+h_{N-2}s'(x_N)\\&=\frac{h_{N-1}^2[x_{N-2},x_{N-1}]f+(2(h_{N-1}+h_{N-2})+h_{N-1})h_{N-2}[x_{N-1},x_N]f}{h_{N-1}+h_N}.\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

为了使插值问题有自适应性,必须考虑如下问题:

(1) 按照(3.4)、(3.5)、(3.6)处理好边界条件. 对于只给出函数值的一类实验数据，即(x_k, f_k), $k=0, 1, \cdots, N$ 已知，按照(3.6)即减少样条结点办法去处理边界条件是合适的. 除此之外，还可考虑用自然样条作拟合.

(2) 样条结点个数及分布怎样才合理? M. G. Cox 提出，结点数目 $N=k(p+1)$，这里 k 取 1 至 3 的整数，p 是函数 $f(x)$ 在$[a, b]$区间上拐点的数目，如果是离散数据，p 等于二次差变号个数，有些问题也可将 p 取成是一次差变号的个数. 然后，依据拟合的效果，适当增大或减少 N.

实际上，如果将结点看成逼近参数，那末问题转化成半线性逼近. 记$\{t_i\}_{-3}^{N+3}$ 为样条结点，则

$$s(x)=\sum_{i=-3}^{N-1} c_i B_{i,4}(x)$$
$$=\sum_{i=-3}^{N-1} c_i(t_{i+4}-t_i)[t_i, \cdots, t_{i+4}](\cdot-x)_+^3. \tag{3.7}$$

例如，我们考虑非线性最小二乘法

$$\sum_{j=1}^{m}(f(x_j)-s(x_j))^2$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left(f(x_j)-\sum_{i=-3}^{N-1} c_i(t_{i+4}-t_i)[t_i, \cdots, t_{i+4}](\cdot-x_j)_+^3\right)^2$$
$$=\min. \tag{3.8}$$

上式中结点看成逼近参数，m 必须大于等于 $2(N+3)+4$. 这是一个无约束条件的最优化计算问题，一般算法可参见参考文献[14]、[15]. 为了节省计算，Cox 提出了一个简便迭代法如下:

(1) 按照函数变化状态，在激烈地方，结点要密的原则，初步选好一组结点.

(2) 按照(3.8)求得这组结点的最小二乘解.

(3) 检查拟合曲线的逼近特征是否满足. 例如拐点、最大的拟合误差等. 若逼近特征满足,则停止计算,否则转入下一步.

(4) 在逼近效果不够好的点加密样条结点, 在好的点地方适当减少结点;

(5) 转入第二步。

3-2 受不等式约束的样条插值

先介绍三次自然样条插值.

设在区间$[a, b]$上给定一个分划

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=b,$$

满足下列条件的函数$s(x)$称为三次自然样条:

(i) 在每个子区间(x_k, x_{k+1}), $k=1, 2, \cdots, N-1$上$s(x)$是不超过三次的多项式, 在$[a, x_1)$, $(x_N, b]$上是不超过一次的多项式;

(ii) $$s(x)\in C^2[a, b].$$

全体$s(x)$构成N维线性空间,记之为NSP.

注意到$s(x)$在区间$[a, x_1)$上是一次多项式, 故$s(x)$可写成

$$s(x)=\alpha+\beta x+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!}, \tag{3.9}$$

又在$(x_N, b]$上$s(x)$是线性函数,将(3.9)写成

$$\begin{aligned}s(x)&=\alpha+\beta x+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!}\\&=\alpha-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}x_i^3\lambda_i+\left(\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\lambda_i\right)x-\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i\\&\quad+\frac{x^3}{6}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i,\end{aligned}$$

并导得

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=0,\\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i=0.\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

(3.10)称为三次自然样条的特征性质.

问题($\boldsymbol{P}$):给定一数组$\{z_i\}_1^N$,寻找这样的$s(x)$使

$$s(x_i)=z_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\tag{3.11}$$

称为三次自然样条插值.

由(3.9)、(3.10)三次自然样条插值问题归结为下列方程组是否有解?

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta x_i+\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j\frac{(x_i-x_j)_+^3}{3!}=z_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\\ \sum_{j=1}^{N}\lambda_j=0;\\ \sum_{j=1}^{N}\lambda_j x_j=0.\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

我们暂且不去研究(3.12)的求解,先来研究三次自然样条的变分性质.

引理5 对任意$f\in C^2[a,\ b]$和任意$s(x)\in \mathrm{NSP}$有

$$\int_a^b s''(x)f''(x)\,dx=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i f(x_i),\tag{3.13}$$

其中

$$\lambda_i=s'''(x_i+0)-s'''(x_i-0),$$

λ_i称为节点x_i处函数$s(x)$的三阶导数跳跃量.

证明 运用分部积分法,注意到

$$s''(a_+)=s''(b_-)=s'''(a_+)=s'''(b_-)=0$$

有 $$\int_a^b s''(x)f''(x)\,dx=s''(x)f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b s'''(x)f'(x)\,dx$$
$$=-\int_a^{x_1} s'''(x)f'(x)\,dx$$

$$-\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} s'''(x)f'(x)dx-\int_{x_N}^{b} s'''(x)f'(x)dx$$

$$=-s'''(x)f(x)\Big|_{a+0}^{x_1-0}-\sum_{i=1}^{N-1}(s'''(x)f(x))\Big|_{x_i+0}^{x_{i+1}-0}$$

$$-s'''(x)f(x)\Big|_{x_N+0}^{b-0}+\sum_{i=0}^{N}\int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} s^{(4)}(x)f(x)dx,$$

由于 $s(x)$ 在 (x_i,x_{i+1}) 是低于三次的多项式，故 $s^{(4)}(x)=0$，从而有

$$\int_a^b s''(x)f''(x)dx=\sum_{i=1}^{N-1}(s'''(x_i+0)f(x_i)$$

$$-s'''(x_{i+1}-0)f(x_{i+1}))$$

$$-s'''(x_1+0)f(x_1)+s'''(x_N-0)f(x_N)$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}s'''(x_i+0)f(x_i)$$

$$-\sum_{i=2}^{N}s'''(x_i-0)f(x_i)$$

$$-s'''(x_1+0)f(x_1)+s'''(x_N-0)f(x_N)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(s'''(x_i+0)-s'''(x_i-0))\,f(x_i).$$

证毕.

由引理 5，容易导得

定理 1(特征定理) 对任意 $f\in C^2[a, b]$ 和任意 $s\in \mathrm{NSP}$ 只要 $f(x_i)=0,\ i=1, 2, \cdots, N$，就有

$$\int_a^b s''(x)f''(x)dx=0. \tag{3.14}$$

证毕.

定理 2(存在唯一性) 任意给定一组数 $\{z_i\}_1^N$，只要 $N\geqslant 2$，就会存在唯一的一个插值函数 $s(x)\in \mathrm{NSP}$，使得

$$s(x_i)=z_i,\quad i=1, 2, \cdots, N$$

证　设 $s_0(x)\in$ NSP, $s_0(x_i)=0$, $i=1, 2, \cdots, N$ 在引理 5 中取 $f(x)=s(x)-s_0(x)$, 于是 $\int_a^b (s_0''(x))^2dx=0$, 故 $s_0''(x)\equiv 0$, $x\in[a, b]$成立. 另外, 由 $s_0(x_i)=0$, $i=1, 2, \cdots, N$, 推得 $s_0(x)\equiv 0$. 证毕.

定理 3(极小模性质)　设 $s(x)\in$ NSP 是三次自然样条插值函数, $f(x)\in C^2[a, b]$是满足对应插值条件 $f(x_i)=z_i$, $i=1, 2, \cdots, N$ 的任一函数, 那么有

$$\int_a^b (s''(x))^2dx\leqslant\int_a^b (f''(x))^2dx \tag{3.15}$$

成立.

证明　注意到

$$\begin{aligned}\int_a^b (f''(x)-s''(x))^2dx=&\int_a^b (f''(x))^2dx\\&-2\int_a^b (f(x)-s(x))''s''(x)dx\\&-\int_a^b (s''(x))^2dx,\end{aligned}$$

由特征定理, 由于 $f(x)-s(x)\in C^2[a, b]$且 $f(x_i)-s(x_i)=0$, 故 $\int_a^b (f(x)-s(x))''s''(x)dx=0$. 证毕.

若记

$$I_z=\{f\in C^2[a, b]\,|\,f(x_i)=z_i,\ i=1, 2, \cdots, N\}, \tag{3.16}$$

$$\|f\|=\left(\int_a^b f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

则由(3.15)有

$$\|s''\|=\min_{f\in I_z}\|f''\|. \tag{3.18}$$

定理 4(最佳逼近性质)　设 $\{z_i\}_1^N$ 是给定的实数, $\sigma(x)\in$ NSP $\cap I_z$ 是对应这组实数的三次自然样条函数, 则有

$$\int_a^b (\sigma''(x)-f''(x))^2dx=\min_{s\in \text{NSP}}\int_a^b (f''(x)-s''(x))^2dx \tag{3.19}$$

成立。这里$f\in I_s$，且任何具有上述性质的$\tilde{\sigma}(x)$和$\sigma(x)$的差是一个一次多项式。

此外，还有

$$\int_a^b (\sigma''(x)-s''(x))^2dx=\min_{f\in I_z}\int_a^b (f''(x)-s''(x))^2dx \tag{3.20}$$

成立．其中$s(x)\in \text{NSP}$，$\sigma(x)$是I_z中具有这种性质的唯一的函数。

证明 由于$s-\sigma\in \text{NSP}$，又$\sigma-f\in C^2[a, b]$且

$$\sigma(x_i)-f(x_i)=0, \quad i=1, 2, \cdots, N,$$

故由特征定理有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (s''(x)-f''(x))^2dx \\
&=\int_a^b (s''(x)-\sigma''(x)+\sigma''(x)-f''(x))^2dx \\
&=\int_a^b (s''(x)-\sigma''(x))^2dx \\
&\quad+\int_a^b (\sigma''(x)-f''(x))^2dx,
\end{aligned}$$

据此，(3.19)成立．此外，如果$\tilde{\sigma}(x)$也有这个性质，那么$\tilde{\sigma}''(x)=\sigma''(x)$，即$\tilde{\sigma}(x)$与$\sigma(x)$只差一个一次多项式。

同样的，(3.20)也成立，由定理2，在I_z中具有这种性质的元素是唯一的．证毕．

三次自然样条插值的数值方法很多，常用三弯矩方程或三转角方程去求解。

在外型设计中，型值是不断需要调整的，因而增加了人-机对话．这里，提出型值不固定的样条插值函数．这样构造出来的曲线有更大的灵活适用性．为了叙述方便，仍以三次样条为例．

在$[a, b]$上给定分划

$$\pi: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_{N+1}=b$$

和两组实数 $\{\alpha_i\}_1^N$, $\{\beta_i\}_1^N$, $\alpha_i\leqslant\beta_i$, $i=1, 2, \cdots, N$.

问题(Q)：求函数$s(x)$满足

(i) 在每个子区间(x_k, x_{k+1}), $k=1, 2, \cdots, N-1$ 上$s(x)$是一个不超过三次的多项式，在$[a, x_1)$和$(x_N, b]$上是一次多项式；

(ii) 在分划点x_i处有$\alpha_i\leqslant s(x_i)\leqslant\beta_i$;

(iii) $$s(x)\in C^2[a, b].$$

我们把$s(x)$叫做在分划π上型值受不等式约束的三次(自然)样条函数．

因为任意取定一组$\{z_i\}_1^N$, $\alpha_i\leqslant z_i\leqslant\beta_i$, $i=1, 2, \cdots, N$, 求出问题(P)的解，它必是满足问题(Q)的解，所以问题(Q)的解有无穷多个．什么时候(Q)的解唯一？这个解有什么特征？下面逐一加以分析．

由于$s(x)$要满足的(i)、(iii)，便直接推出$s(x)$属于三次自然样条函数空间，即$s(x)$可表成

$$s(x)=a_0+a_1x+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!}. \tag{3.21}$$

由于$s(x)\in$NSP，故引理5，定理1(特征定理)，(3.10)(特征性质)仍成立．

定理5(极小模性质) 设$s(x)\in$NSP是插值问题(Q)的解，且成立着

$$\left.\begin{array}{ll}\text{如果} & \alpha_i < s(x_i) < \beta_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, N\}, \\ \text{有} & s'''(x_i-0) = s'''(x_i+0); \\ \text{如果} & \alpha_i = s(x_i) < \beta_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, N\}, \\ \text{有} & s'''(x_i+0) - s'''(x_i-0) \geqslant 0; \\ \text{如果} & \alpha_i < s(x_i) = \beta_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, N\}, \\ \text{有} & s'''(x_i+0) - s'''(x_i-0) \leqslant 0. \end{array}\right\} \tag{3.22}$$

那么，当 $f(x) \in C^2[a, b]$ 是满足对应插值条件

$$\alpha_i \leqslant f(x_i) \leqslant \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

的任一函数，有最小模不等式成立：

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leqslant \int_a^b (f''(x))^2 dx. \tag{3.23}$$

证明 由引理5，我们有

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i s(x_i),$$

$$\int_a^b s''(x) f''(x) dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i f(x_i),$$

其中 $\lambda_i = s'''(x_i+0) - s'''(x_i-0)$. 在(3.22)中，满足第一、二、三种情况的 i 的全体分别记之为 I_1, I_2, I_3. 由于

$$\alpha_i \leqslant f(x_i) \leqslant \beta_i,$$

那么有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i s(x_i) &= \sum_{i \in I_1} \lambda_i s(x_i) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i \in I_3} \lambda_i \beta_i \\ &= \sum_{i \in I_2} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i \in I_3} \lambda_i \beta_i \\ &\leqslant \sum_{i \in I_2} \lambda_i f(x_i) + \sum_{i \in I_3} \lambda_i f(x_i) \\ &= \sum_{i \in I_1} \lambda_i f(x_i) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i f(x_i) + \sum_{i \in I_3} \lambda_i f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

从而

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leqslant \int_a^b s''(x) f''(x) dx.$$

进一步，由于

$$\int_a^b (s''(x))^2dx-2\int_a^b s''(x)f''(x)dx+\int_a^b (f''(x))^2dx$$

$$=\int_a^b (f''(x)-s''(x))^2dx\geqslant 0,$$

故
$$\int_a^b (f''(x))^2dx-\int_a^b s''(x)f''(x)dx$$

$$\geqslant\int_a^b s''(x)f''(x)dx-\int_a^b (s''(x))^2dx\geqslant 0,$$

或即有

$$\int_a^b (f''(x))^2dx\geqslant\int_a^b f''(x)s''(x)dx\geqslant\int_a^b (s''(x))^2dx. \qquad (3.24)$$

定理证毕。

记

$$G=\{f(x)\in C^2[a,\ b]\,|\,\alpha_i\leqslant f(x_i)\leqslant\beta_i,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\},$$

(3.24)指出了一个更普遍的结果

$$\int_a^b (s''(x))^2dx=\min_{f\in G}\int_a^b (f''(x))^2dx$$

$$=\min_{f\in G}\int_a^b f''(x)s''(x)dx. \qquad (3.25)$$

定理6 设满足(3.22)的问题(Q)的解存在，则其解之差是一个一次多项式。

证明 假定$s_1(x)$、$s_2(x)$是满足(3.22)式的问题(Q)的解，利用(3.24)式，得出

$$\int_a^b (s_1''(x))^2dx\geqslant\int_a^b s_1''(x)s_2''(x)dx\geqslant\int_a^b (s_2''(x))^2dx$$

及
$$\int_a^b (s_2''(x))^2dx\geqslant\int_a^b s_1''(x)s_2''(x)dx\geqslant\int_a^b (s''(x))^2dx.$$

故
$$\int_a^b (s_1''(x))^2dx=\int_a^b s_1''(x)s_2''(x)dx=\int_a^b (s_2''(x))^2dx,$$

从而有 $\int_a^b (s_1''(x)-s_2''(x))^2dx=\int_a^b(s_1''(x))^2dx$

$$-2\int_a^b s_1''(x)s_2''(x)dx+\int_a^b(s_2''(x))^2dx=0,$$

即 $$(s_1(x)-s_2(x))''\equiv 0,\quad x\in[a,\ b].$$

定理得证.

定理 7(唯一性定理) 假定问题(Q)中的实数组$\{\alpha_i\}_1^N$，$\{\beta_i\}_1^N$对于任给的一次多项式$f(x)$，如果

$$\alpha_i-\beta_i\leqslant f(x_i)\leqslant\beta_i-\alpha_i, \tag{3.26}$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，就有$f(x)\equiv 0$，$x\in[a,\ b]$. 那么满足(3.22)式的问题(Q)的解存在而且唯一.

证明 解的存在性证明略.

设$s_1(x)$、$s_2(x)$是满足(3.22)的问题(Q)的解，由定理6，$s_1(x)-s_2(x)$是一次多项式，由于

$$\alpha_i\leqslant s_j(x_i)\leqslant\beta_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ j=1,\ 2.$$

故 $$\alpha_i-\beta_i\leqslant s_1(x_i)-s_2(x_i)\leqslant\beta_i-\alpha_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

由本定理的假设，得$s_1(x)-s_2(x)\equiv 0$. 证毕.

下面，我们来论述求解插值问题(Q)的二次规划方法，大致步骤如下：

(1) 设 $$s(x)=a_0+a_1x+\sum_{i=1}^N\lambda_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!},$$

(2) 求 $$\int_a^b(s''(x))^2dx,$$

它是以λ为未知数的一个二次式.

(3) 在
$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i\leqslant s(x_i)\leqslant\beta_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\\&\sum_{i=1}^N\lambda_i=0;\\&\sum_{i=1}^N\lambda_ix_i=0\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

的条件下求关于λ_i的二次型的极小值，即

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx = \min. \tag{3.28}$$

这是一个二次规划问题，解出λ_i, a_0, a_1，即可求出$s(x)$。

例 4　求满足(3.22)的三次样条插值，这里设

$$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=9,\ a=-2,\ b=10;$$

$$\alpha_1=5,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=101;$$

$$\beta_1=5,\ \beta_2=1,\ \beta_3=101.$$

解　设

$$s(x)=a_0+a_1x+\frac{\lambda_1}{6}x_+^3+\frac{\lambda_2}{6}(x-3)_+^3+\frac{\lambda_3}{6}(x-9)_+^3,$$

有

$$s''(x)=\lambda_1 x_+ +\lambda_2(x-3)_+ +\lambda_3(x-9)_+,$$

进一步求

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx=\frac{1000}{3}\lambda_1^2+\frac{227}{3}\lambda_1\lambda_2+\frac{29}{3}\lambda_1\lambda_3+\frac{343}{3}\lambda_2^2+\frac{137}{3}\lambda_2\lambda_3+\frac{1}{3}\lambda_3^2,$$

在约束条件

$$\left.\begin{aligned}&5\leqslant a_0\leqslant 5,\\&0\leqslant a_0+3a_1+\frac{9}{2}\lambda_1\leqslant 1,\\&101\leqslant a_0+9a_1+\frac{243}{2}\lambda_1+36\lambda_2\leqslant 101,\\&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\&3\lambda_2+9\lambda_3=0\end{aligned}\right\}$$

之下的极小值。这是一个二次规划问题，可解得(参阅文献[3])：$a_0=5$, $a_1=-\frac{13}{3}$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=1$，最后求得

$$s(x)=\frac{1}{3}x_+^3-\frac{1}{2}(x-3)_+^3+\frac{1}{6}(x-9)_+^3+5-\frac{13}{3}x.$$

经检验 本例满足定理 7 的条件，因而解是唯一的.

§4 最小二乘法和光顺样条

从方法本身看，分成连续型和离散型. 自从发现样条函数的变分性质后，出现了插值和最小二乘的混合提法.

假定给定曲线 $y=f(x)$ 或一组型值 (x_i, y_i), $i=1, 2, \cdots, N$. $f(x)$ 属于某一线性空间 X, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 X 中的线性无关元素，X 中的一个子集为

$$\mathscr{L}=\mathrm{Span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}.$$

所谓曲线拟合的最小二乘法，是在 $\mathscr{L}$ 中选择这样的

$$\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n,$$

使得目标函数

$$I(c_1, c_2, \cdots, c_n)=\int_a^b \rho(x)\Big(f(x)-\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\Big)^2 dx =\min(\text{连续型}), \tag{4.1}$$

其中 $\rho(x)\geqslant 0$ 且 $\rho(x)\not\equiv 0 (a\leqslant x\leqslant b)$ 称为权函数.

$$I=\sum_{i=1}^N \omega_i\Big(y_i-\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x_i)\Big)^2 dx=\min(\text{离散型}). \tag{4.2}$$

一般讲 $N\geqslant n$, ω_i 称为 y_i 的权因子.

在 $C^2[x_1, x_N]$ 函数类中选择 $g_p(x)$ 使得目标函数

$$I=p\sum_{i=1}^N\Big(\frac{y_i-g_p(x_i)}{\delta y_i}\Big)^2+(1-p)\int_{x_1}^{x_N}(g_p''(x))^2dx=\min. \tag{4.3}$$

δy_i 称为 y_i 的权因子. p 为光顺因子，(4.3) 称为插值和最小二乘混合模型. 当 $p=1$ 时 (4.3) 变为 (4.2). 当 $p=0$ 时，将导出三次自然插值样条.

4.1 将折线作为拟合曲线

给定$[a, b]$的一个非等距分划

$$\pi: \ t_1 = t_2 = a < t_3 < \cdots < t_{n+1} = t_{n+2} = b,$$

选取一次 B 样条为基函数：

$$\varphi_i(x) = B_{i,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}, & t_i < x < t_{i+1}, \\ \dfrac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}}, & t_{i+1} < x < t_{i+2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

对于$[a, b]$上平方可积的函数$f(x)$，求它在均方意义下的最小二乘拟合：

$$I(c_1, \cdots, c_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,2}(x) \right)^2 dx = \min. \tag{4.4}$$

令 $\dfrac{\partial I}{\partial c_j} = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$ 便导致求 c_j 的法方程式：

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b B_{i,2}(x) B_{j,2}(x) dx \right) c_j = \int_a^b B_{i,2}(x) f(x) dx,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n. \tag{4.5}$$

记 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$，注意到

$$\tau_{i,j} = \int_a^b B_{i,2}(x) B_{j,2}(x) dx = 0, \quad |i - j| > 1;$$

$$\tau_{i,i} = \int_a^b (B_{i,2}(x))^2 dx = \int_{t_i}^{t_{i+2}} (B_{i,2}(x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} (\Delta t_i + \Delta t_{i+1});$$

$$\tau_{i-1,i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_{i-1,2}(x) B_{i,2}(x) dx = \frac{1}{6} \Delta t_i;$$

$$\tau_{i+1,i} = \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} B_{i+1,2}(x) B_{i,2}(x) dx = \frac{1}{6} \Delta t_{i+1},$$

进而将(4.1)归为解三对角严格占优的对称方程组：

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\Delta t_i}{6}c_{i-1}+\dfrac{\Delta t_i+\Delta t_{i+1}}{3}c_i+\dfrac{\Delta t_{i+1}}{6}c_{i+1}=\beta_i,\\ \beta_i=\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+2}}B_{i,2}(x)f(x)dx,\ \Delta t_1=\Delta t_{n+1}=0,\\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.\end{array}\right\}\qquad(4.6)$$

(4.6)可用追赶法求解. 下面，分析方法的误差. 假定 $f(x)\in C[a,\ b]$，由相应一次 B 样条组成的子空间为 $\mathscr{L}$. 称

$$\operatorname{dist}(f,\ \mathscr{L})=\min_{g\in\mathscr{L}}\|g-f\|_\infty\qquad(4.7)$$

为 f 到子空间 $\mathscr{L}$ 的距离.

定理8 若 $f\in C[a,\ b]$，相应于(4.6)的解记为 L_2f，则成立着估计式

$$\left.\begin{array}{l}\|L_2f\|_\infty\leqslant3\|f\|_\infty,\\ \|f-L_2f\|_\infty\leqslant4\operatorname{dist}(f,\ \mathscr{L}).\end{array}\right\}\qquad(4.8)$$

若 $f(x)\in C^2[a,\ b]$，记 $\tau=\max\limits_i\Delta t_i$ 有

$$\|f-L_2f\|_\infty\leqslant\frac{\tau^2}{2}\|f''\|_\infty.\qquad(4.9)$$

特别的，当分划为等距时，即步长 $\tau=\dfrac{b-a}{n-1}$ 时有

$$\|f-L_2f\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n-1}\right)^2\|f''\|_\infty=O(n^{-2}).\qquad(4.9)'$$

证明 由 B 样条性质有

$$\|L_2f\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|=|c_j|,$$

注意到(4.6)有

$$\frac{\Delta t_j}{\Delta t_j+\Delta t_{j+1}}c_{j-1}+2c_j+\frac{\Delta t_{j+1}}{\Delta t_j+\Delta t_{j+1}}c_{j+1}=\frac{6}{\Delta t_j+\Delta t_{j+1}}\beta_j,$$

从而

$$2|c_j| = \left| \frac{6}{\Delta t_j + \Delta t_{j+1}} \beta_j - (\Delta t_j c_{j-1} + \Delta t_{j+1} c_{j-1}) \frac{1}{\Delta t_j + \Delta t_{j+1}} \right|$$

$$\leqslant \frac{6}{\Delta t_j + \Delta t_{j+1}} |\beta_j| + |c_j|,$$

即有$\|L_2 f\|_\infty \leqslant \frac{6}{\Delta t_j + \Delta t_{j+1}} |\beta_j|$. 另一方面有

$$\frac{6}{\Delta t_j + \Delta t_{j+1}} |\beta_j| \leqslant \frac{6\|f\|_\infty}{\Delta t_j + \Delta t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+2}} B_{j,2}(x)dx = 3\|f\|_\infty,$$

(4.8)的第一式得证. 又当 s_1 是(4.7)的解时有

$$\|f - L_2 f\|_\infty = \|f - s_1 + L_2(s_1 - f)\|_\infty$$

$$\leqslant \|f - s_1\|_\infty + 3\|s_1 - f\|_\infty = 4\,\mathrm{dist}(f, \mathscr{L}).$$

取 $s_1(x)$为一次样条插值, 即

$$s_1(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) B_{i,2}(x)$$

有 $$\|f - s_1\| \leqslant \frac{\tau^2}{8} \|f''\|_\infty,$$

故(4.9)得证.

4-2 光顺样条

给定$[a, b]$上的一个分划

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

假定在分划点 x_i 上, 曲线 $y=f(x)$的型值 y_i 已知. 由于实测的误差, 一般讲 y_i 带有某种测量误差. 这里, 我们建立一个目标函数, 它既有最小二乘特点, 又可通过参数的调整, 使它变成插值问题. 简言之,就是寻求 $g_p(x) \in C^2[x_1, x_N]$使得

$$I(c_1, \cdots, c_n) = p \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - g_p(x_i)}{\delta y_i} \right)^2 + (1-p) \int_{x_1}^{x_N} (g_p''(x))^2 dx = \min. \qquad (4.10)$$

这里 p 是可调整的参数, $0 < p < 1$.

引理6 假设 $g_p(x)$ 是(4.10)的极小解，则任给 $\eta(x)\in C^2[x_1, x_N]$ 都有

$$\int_{x_1}^{x_N} g_p''(x)\eta''(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\eta(x_i), \tag{4.11}$$

这里
$$\lambda_i=\frac{p}{(p-1)(\delta y_i)^2}(g_p(x_i)-y_i).$$

证明 记 $\psi_p(x)=g_p(x)+\varepsilon\eta(x)$，这里 ε 是微小参数，将它代入(4.10)并将左端用 $F(\varepsilon)$ 记之有

$$F(\varepsilon)=(1-p)\int_{x_1}^{x_N}(g_p''(x)+\varepsilon\eta''(x))^2dx$$
$$+p\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i-g_p(x_i)-\varepsilon\eta(x_i)}{\delta y_i}\right)^2,$$

由于 $g_p(x)$ 是(4.10)极小解，故 $F'(0)=0$，即有

$$(1-p)\int_{x_1}^{x_N} g_p''(x)\eta''(x)dx+p\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta(x_i)(g_p(x_i)-y_i)}{(\delta y_i)^2}=0.$$

证毕.

推论1 任意满足 $\eta(x_i)=0$, $i=1, 2, \cdots, N$ 的 $\eta(x)\in C^2[x_1, x_N]$，成立着

$$\int_{x_1}^{x_N} g_p''(x)\eta''(x)dx=0. \tag{4.11$'$}$$

这是推广到希氏空间中光顺样条函数的一个重要特征.

推论2 下列关系式成立

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i=0,\\&\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

证明 由引理6，取 $\eta(x)=1$, x 即得证.

定理9(光顺样条特征定理) 如果 $g_p(x)$ 是(4.10)的解，则 $g_p(x)$ 是三次自然样条函数，即 $g_p(x)$ 可表成

$$g_p(x)=\alpha+\beta x+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!},\tag{4.13}$$

其中 $$\lambda_i=\frac{p}{(p-1)(\delta y_i)^2}(g_p(x_i)-y_i).$$

证明 假定 $\eta(x)$ 是 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数的任意指定函数，由 Taylor 展开式有

$$\eta(x)=\eta(x_1)+(x-x_1)\eta'(x_1)+\int_{x_1}^{x_N}(x-t)_+\eta''(t)dt,$$

由引理 6 注意到 $(x-t)_+=(x-t)+(t-x)_+$ 有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_N}g_p''(x)\eta''(x)dx&=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\eta(x_i)\\&=(\eta(x_1)-x_1\eta'(x_1))\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\\&\quad+\eta'(x_1)\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i\\&\quad+\int_{x_1}^{x_N}\eta''(t)\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i-t\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)dt\\&\quad+\int_{x_1}^{x_N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x-x_i)_+\eta''(x)dx.\end{aligned}$$

由 $\eta''(x)$ 的任意性，便导得

$$g_p''(x)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x-x_i)_+,$$

从而 $$g_p(x)=\alpha+\beta x+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{(x-x_i)_+^3}{3!}.$$

证毕.

下面，寻求 $g_p(x)$ 表达式，为书写方便简记 $g_p(x)$ 为 $g(x)$ 并约定

$$a_i=g(x_i),\ c_i=g''(x_i)/2,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.\tag{4.14}$$

由于 $g''(x)$ 在 $[x_{i-1},\ x_i]$ 是一次函数，注意到

$$g''(x_j)=2c_j\quad (j=i-1,\ i),$$

便有 $g''(x)=2c_{i-1}\dfrac{x_i-x}{\Delta x_{i-1}}+2c_i\dfrac{x-x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}$, $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$.

将 $g''(x)$ 积分二次并注意 $g(x_j)=a_j(j=i-1, i)$ 便得

$$
\begin{aligned}
g(x)=&c_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{3\Delta x_{i-1}}+c_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{3\Delta x_{i-1}}\\
&+\left(a_{i-1}-\frac{c_{i-1}(\Delta x_{i-1})^2}{3}\right)\frac{x_i-x}{\Delta x_{i-1}}\\
&+\left(a_i-\frac{c_i(\Delta x_{i-1})^2}{3}\right)\frac{x-x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

对 $g(x)$ 求一次导数,又得

$$
\begin{aligned}
g'(x)=&-c_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{\Delta x_{i-1}}+c_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{\Delta x_{i-1}}\\
&+\frac{\Delta a_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}-\frac{\Delta c_{i-1}}{3}\cdot\Delta x_{i-1},
\end{aligned}
$$

注意到 $g'(x)$ 在 x_i 的连续性,我们推得

$$
c_i\Delta x_{i-1}+\frac{\Delta a_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}-\frac{\Delta c_{i-1}}{3}\Delta x_{i-1}=-c_i\Delta x_i+\frac{\Delta a_i}{\Delta x_i}-\frac{\Delta c_i}{3}\Delta x_i,
$$

$$
i=2, 3, \cdots, N-1.
$$

对上式两边加以整理并注意到 $g''(x_1)=g''(x_N)=0$,我们得到关于 c_i 的联立方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
c_{i-1}\Delta x_{i-1}+2c_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)+c_{i+1}\Delta x_i=3\left(\frac{\Delta a_i}{\Delta x_i}-\frac{\Delta a_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}\right),\\
c_1=c_N=0,\ i=2, 3, \cdots, N-1.
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.16}
$$

上述方程组的系数矩阵 R 是对称三对角且严格占优,故 c_i 的解存在且唯一,将求得的 c_i 代入(4.15)便求得含有待定参数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的函数 $g(x)$. 再将它代入(4.10)并令 $I=\min$,便将 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 确定下来. 这样,三次自然样条函数 $g(x)$ 的表达式便被求出. 下面,记 R 为 $N-2$ 阶方阵, Q^T 为 $(N-2)\times N$ 阶矩阵, a 和 c 分别为 N 维, $N-2$ 维向量:

$$R=\begin{pmatrix} 2(\Delta x_1+\Delta x_2) & \Delta x_2 & & & \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_2+\Delta x_3) & \Delta x_3 & & \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & \Delta x_{N-3} & 2(\Delta x_{N-3}+\Delta x_{N-2}) & \Delta x_{N-2} \\ & & & \Delta x_{N-2} & 2(\Delta x_{N-2}+\Delta x_{N-1}) \end{pmatrix},$$

$$c=\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$Q^T=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_1} & -\left(\frac{1}{\Delta x_1}+\frac{1}{\Delta x_2}\right) & \frac{1}{\Delta x_2} & & & \\ & \frac{1}{\Delta x_2} & -\left(\frac{1}{\Delta x_2}+\frac{1}{\Delta x_3}\right) & \frac{1}{\Delta x_3} & & \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & & \frac{1}{\Delta x_{N-2}} & -\left(\frac{1}{\Delta x_{N-2}}+\frac{1}{\Delta x_{N-1}}\right) & \frac{1}{\Delta x_{N-1}} \end{pmatrix},$$

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}.$$

于是(4.16)写成

$$Rc=3Q^Ta. \tag{4.16$'$}$$

其次，对于任何直线 $l(x)$ 有

$$\int_0^h (l(x))^2 dx=\frac{h}{3}[(l(0))^2+l(0)l(h)+(l(h))^2].$$

于是(4.10)成为

$$I=p\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i-a_i}{\delta y_i}\right]^2+\frac{4(1-p)}{3}\sum_{i=1}^{N-1}\Delta x_i(c_i^2+c_ic_{i+1}+c_{i+1}^2),$$

将它写成矩阵形式为

$$I = p(y-a)^T D^{-2}(y-a) + \frac{2}{3}(1-p)c^T Rc,$$

这里 D 为 N 阶对角矩阵，y 为 N 维向量:

$$D = \begin{pmatrix} \delta y_1 & & & \\ & \delta y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta y_N \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

另一方面依据(4.16)′，有

$$c = 3R^{-1}Q^T a,$$

于是可将目标函数写成

$$I = p(y-a)^T D^{-2}(y-a) + 6(1-p)(R^{-1}Q^T a)^T R(R^{-1}Q^T a). \tag{4.17}$$

因为矩阵 D^{-2} 和 $(R^{-1}Q^T)^T R(R^{-1}Q^T)$ 是对称正定的，故当

$$-2pD^{-2}(y-a) + 12(1-p)(R^{-1}Q^T)^T R(R^{-1}Q^T)a = 0$$

时，目标函数 I 取最小值. 注意到 $R^{-1} = (R^{-1})^T$，将上式化简有

$$pD^{-2}(y-a) = 2(1-p)QC. \tag{4.18}$$

由(4.18)，我们有

$$s(g_p) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{y_j - g_p(x_j)}{\delta y_j}\right)^2 = (y-a)^T D^{-2}(y-a)$$

$$= \left[\frac{2(1-p)}{p}\right]^2 \|DQc\|^2.$$

这里$\|\cdot\|$是欧氏模. 为了确定关于 c 的方程组的解，我们将(4.18)两端左乘以 $3Q^T D^2$ 并注意到(4.16)′得到

$$p(3Q^T Y - Rc) = 6(1-p)Q^T D^2 Qc,$$

或写成 $$(6(1-p)Q^T D^2 Q + pR)c = 3PQ^T y.$$

记 $$c = 3pu, \quad u = (u_2 \cdots u_{N-1})^T,$$

可得关系式

$$(6(1-p)Q^T D^2 Q + pR)u = Q^T y, \tag{4.18)'$$

并且

$$s(g_p) = 36(1-p)^2 \| DQu \|^2, \tag{4.19}$$

$$a = y - 6(1-p) D^2 Qu. \tag{4.20}$$

也即是说，通过(4.18)′求得u，从而求得c；再通过(4.20)将a确定下来．将a，c代入(4.15)便求得使(4.10)取最小值的三次自然样条函数$g_p(x)$，简称为**光顺样条**．

不难知道

$$g_p(x_i) = a_i,$$

$$g'_p(x_i) = \frac{\Delta a_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i g''_p(x_i)}{2} - \frac{(\Delta x_i)^2}{6} g'''_p(x_{i+}),$$

$$g''_p(x_i) = 6pu_i,$$

$$g'''_p(x_{i+}) = \frac{g''_p(x_{i+1}) - g''_p(x_i)}{\Delta x_i}.$$

由此，可运用泰勒展开式将$g_p(x)$在(x_i, x_{i+1})的表达式确定下来：

$$g_p(x) = g_p(x_i) + (x - x_i) g'_p(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2} g''_p(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6} g'''_p(x_{i+}).$$

若对$g_p(x)$建立参变量形式，即$x = x_p(t)$，$y = y_p(t)$，t取正整数，即$x_p(j) = x_j$，$y_p(j) = y_j$．分别对$x_p(t)$，$y_p(t)$建立光顺样条，便得到$g_p(x)$的参数形式．由于t是等距的，计算格式特别简单．更重要的是利用它可表达闭曲线，如椭圆等．还可以在机器上显示出美观的China草写体，形形式式的美术工艺品．

第 3 章

局部逼近法

在外形设计中，常常要求被拟合的曲线具有某些几何特征．通常作如下的考虑：

（i）采用分片多项式(或其它函数)，在结点处有适当的光滑度；比较常用的是属于 C^1 类的分片三次多项式．

（ii）拟合的曲线不一定过型值点，在结点处曲线的切线斜率不一定等于原曲线切线斜率．这类曲线在整体上具有明显的几何特征．也即是讲，为了使曲线保持一定的几何特征，放宽了曲线过型值点等方面的要求．磨光法就是这类方法的一个典型代表．

所谓局部逼近法，就是被拟合的曲线 $y=s(x)$ 在 x_0 处的值只跟周围几个点的型值或导数值有关；换言之，曲线的局部几何特征可通过局部型值的调整而被满足，局部逼近的一个优点是计算简单，通常情况下不必通过解大型方程组来确定曲线的方程．

在局部逼近法中，最常见的是 Hermite 型的分片三次插值．在本章里侧重介绍这一方法．磨光曲线的几何特征及拟插值等内容在本章里也要谈到．

§1 Hermite 型的分片三次插值

给定$[a, b]$的一个不等距分划

$$\pi: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,$$

要求寻找 $y=f(x)$ 的拟合曲线 $y=s(x)$，它满足下列条件

（i）在每个子区间 (x_i, x_{i+1}) 上是分片三次多项式，$i=0, 1, \cdots, N-1$；

（ii）在 $[a, b]$ 上 $s(x)$ 是 C^1 类函数；

（iii）$s(x)$ 在 (x_i, x_{i+1}) 上的表达式由下列条件决定：

$$\left.\begin{array}{l} s(x_i)=\alpha_i,\ s(x_{i+1})=\alpha_{i+1}; \\ s'(x_i)=\beta_i,\ s'(x_{i+1})=\beta_{i+1}. \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

这里 α_i, α_{i+1}, β_i, β_{i+1} 是自由参数；诚然，我们可适当地选择这些参数来达到逼近和光滑的要求。α_j 称为型值参数，β_j 称为导数参数. 形形式式的分片三次曲线将通过 α_j, β_j 的不同选择而得到. 在下面讨论中，我们还将看到，在特殊情况下，$s(x)$ 能属于 C^2 函数类. 如果再适当增加样条结点，那么，所表示的曲线的灵活适应性就更大了。

我们称满足条件 (1.1) 的函数为函数 $f(x)$ 的 Hermite 型的分片三次插值函数. 当 $\alpha_i=f(x_i)$, $\alpha_{i+1}=f(x_{i+1})$, $\beta_i=f'(x_i)$, $\beta_{i+1}=f'(x_{i+1})$ 时就是常见的 Hermite 插值.

为什么 Hermite 型插值是曲线局部逼近的一个重要方法呢？首先，计算是局部进行的，简单的. 其次，常常可通过 α_j 来调整逼近精度，又通过 β_j 来调整曲线的几何特征，或两者兼而有之. 总之，α_j 反映了逼近特征，而 β_j 恰恰又反映了几何特征，两者相结合便可得到许多有兴趣的曲线.

引理 1 分片三次 Hermite 型插值函数在区间 (x_i, x_{i+1}) 上可表成

$$\begin{aligned} s(x)=&\varphi_{0,i}(x)\alpha_i+\varphi_{0,i+1}(x)\alpha_{i+1}+\varphi_{1,i}(x)\beta_i \\ &+\varphi_{1,i+1}(x)\beta_{i+1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $\varphi_{i,j}(x)$ 称为 Lagrange 基函数，即

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{0,i}(x)&=\left(1+2\,\frac{x-x_i}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)^2,\\
\varphi_{0,i+1}(x)&=\left(1-2\,\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2;\\
\varphi_{1,i}(x)&=(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)^2,\\
\varphi_{1,i+1}(x)&=(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3)
$$

这里 $h_i=x_{i+1}-x_i$.

事实上,直接验明 $\varphi_{ij}(x)$ 满足

$$
\varphi_{0,j}^{(l)}(x_\nu)=\delta_{l,0}\delta_{j,\nu},\quad \varphi_{1,j}^{(l)}(x_\nu)=\delta_{1,l}\delta_{j,\nu},\qquad(1.4)
$$

且 $\varphi_{i,j}(x)$ 均属三次多项式,故引理得证,而且容易验明

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{0,i}(x)&=\varphi_{0,i+1}(x_{i+1}+x_i-x),\\
\varphi_{1,i}(x)&=-\varphi_{1,i+1}(x_{i+1}+x_i-x)
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4)'
$$

成立. 证毕.

公式(1.2)常常被用来作误差估计. 为了分析几何特征,我们引进 $s(x)$ 的差商表示. 回忆一下重结点差商,我们有

$$
[x_i,\ x_i]s=s'(x_i)=\beta_i,
$$

$$
\begin{aligned}
[x_i,\ x_i,\ x_{i+1}]f&=\frac{[x_i,\ x_{i+1}]s-[x_i,\ x_i]s}{h_i}\\
&=\frac{[x_i,\ x_{i+1}]s-\beta_i}{h_i}.
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
[x_i,\ x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1}]s&=\frac{[x_{i+1},\ x_{i+1},\ x_i]s-[x_i,\ x_i,\ x_{i+1}]s}{h_i}\\
&=\frac{\beta_i-2[x_i,\ x_{i+1}]s+\beta_{i+1}}{h_i^2},
\end{aligned}
$$

这里
$$
[x_i,\ x_{i+1}]s=\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{h_i}.
$$

应用 Newton 插值公式, Hermite 型的插值公式在 $(x_i,\ x_{i+1})$

上能写成

$$s(x)=[x_i]s+(x-x_i)[x_i,\ x_i]s+(x-x_i)^2[x_i,\ x_i,\ x_{i+1}]s$$
$$+(x-x_i)^2(x-x_{i+1})[x_i,\ x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1}]s. \qquad (1.5)$$

从计算角度看，$s(x)$ 又可写成矩阵形式，令 $\frac{x-x_i}{h_i}=t$，直接由(1.2)得

$$s(t)=(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \alpha_{i+1}\\ \beta_i h_i\\ \beta_{i+1}h_i\end{bmatrix},$$
$$0\leqslant t\leqslant 1. \qquad (1.6)$$

1-1 Hermite 插值

取 $\alpha_j=f(x_j)$，$\beta_j=f'(x_j)$，称 $s(x)$为函数 $f(x)$的分片三次 Hermite 插值函数，为符号方便，记 $s(x)$为 $H(x)$，由熟知的余项公式有

$$f(x)-H(x)=(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2[x_i,\ x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1},\ x]f$$
$$=\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}{4!}f^{(4)}(\xi),$$
$$\xi \text{ 介于 } x_i,\ x_{i+1},\ x \text{ 之间}. \qquad (1.7)$$

引理2 假设 $f(x)\in C^4[a,\ b]$，$s(x)$ 为(1.1)的解，则在$(x_i,\ x_{i+1})$上有估计式

$$f(x)-s(x)=\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}{4!}f^{(4)}(\xi)+E(x) \qquad (1.8)$$

成立．这里 ξ 依赖于 x，含于区间$(x_i,\ x_{i+1})$中．而

$$E(x)=e_i\varphi_{0,i}(x)+e_{i+1}\varphi_{0,i+1}(x)$$
$$+d_i\varphi_{1,i}(x)+d_{i+1}\varphi_{1,i+1}(x),$$
$$e_j=f(x_j)-\alpha_j,\ d_j=f'(x_j)-\beta_j.$$

此外，在$[a,\ b]$上有估计式

$$\|f-s\|_\infty \leqslant \frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty + \max_j |e_j| + \frac{h}{4}\max_j|\varepsilon_j|, \quad (1.8)'$$

这里

$$|\varepsilon_j| = \left|d_j \frac{x_{j+1}-x}{h_j} - d_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}\right|, \ h=\max_j(h_j).$$

或

$$\|f-s\|_\infty \leqslant \frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty + \max_j |e_j| + \frac{h}{4}\max_j|d_j|. \quad (1.8)''$$

证明 注意到(1.2)、(1.3)、(1.7)和下面关系式

$$f(x)-s(x)=f(x)-H(x)+H(x)-s(x),$$

并由 $\max\limits_{x_i<x<x_{i+1}} |\varphi_{0,i}(x)| = \max\limits_{x_i<x<x_{i+1}} |\varphi_{0,i+1}(x)| = 1$, 便可获得引理的证明.

从(1.8)″我们看到，在一般情况下，为了使 $f(x)-s(x)$ 有一定的精度，应怎么去匹配 α_j 和 β_j，兹列表如下

表 1

$f(x)-s(x)$ 精度	$\alpha_j-f(x_j)$ 精度	$\beta_j-f'(x_j)$ 精度
$O(h)$	$O(h)$	$O(1)$
$O(h^2)$	$O(h^2)$	$O(h)$
$O(h^3)$	$O(h^3)$	$O(h^2)$
$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^3)$

为了研究 $s(t)$ 在(0, 1)区间是否有极大、极小点，叙述二个引理.

引理 3 实系数二次式 $x^2+2px+q$ 在[0, 1]中有二个相异实根的充要条件是

$$p^2-q>0,\ p<0,\ 0\leqslant q<1,\ 1+2p+q\geqslant 0.$$

证明 设 $x^2+2px+q=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$, 则有 $2p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$, 且

$$x_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-q}.$$

必要性 若 $x_1 \neq x_2$ 为实数且 $0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1$，立即知 $p^2-q>0,\ p<0,\ 0\leqslant q<1,\ 1+2p+q=(1-x_1)(1-x_2)>0$。

充分性 由 $p^2-q>0$，可知 $x_1,\ x_2$ 为实根. 由 $0\leqslant q<1$ 及 $p<0$ 可得 x_1、$x_2 \geqslant 0$ 且 $x_1x_2\leqslant 1$. 若 $x_1>1$ 则 $x_2<1$，从而 $1+2p+q=(1-x_1)(1-x_2)<0$，这与 $1+2p+q\geqslant 0$ 矛盾，所以 $0\leqslant x_1x_2\leqslant 1$. 引理证毕.

引理 4 实系数二次式 $x^2+2px+q$ 在 $[0,\ 1]$ 中有唯一实根的充要条件是 $q(1+2p+q)\leqslant 0$，且 q、$1+2p+q$ 不同时为零。

有了引理 3 和 4，我们便可判别 $s(x)$ 在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上的极值性质。

引理 5 $s(x)$ 在 $(x_i,\ x_{i+1})$ 上有拐点的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}&[x_i,\ x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1}]f\neq 0,\\ &0<\frac{[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1}]f-2[x_i,\ x_i,\ x_{i+1}]f}{3h_i[x_i,\ x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+1}]f}<1.\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

1-2 分片三次贝塞尔(Bessel)插值[1]

将 α_j 取成 $f(x_j)$ 而 β_j 取成

$$\beta_j=\frac{h_j[x_{j-1},\ x_j]f+h_{j-1}[x_j,\ x_{j+1}]f}{h_j+h_{j-1}},$$

称插值问题

$$\left.\begin{aligned}&s(x_i)=f(x_i),\quad s(x_{i+1})=f(x_{i+1}),\\ &s'(x_i)=\beta_i,\quad s'(x_{i+1})=\beta_{i+1},\quad i=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

为分片三次 Bessel 插值.

定理 1 若 $f(x)\in C^4[a,\ b]$，则 Bessel 插值的截断误差满足

$$\|f(x)-s(x)\|_\infty\leqslant\frac{h^3}{12}\left(\frac{h}{32}\|f^{(4)}\|_\infty+\frac{1}{2}\|f^{(3)}\|_\infty\right), \tag{1.11}$$

其中 $h=\max\limits_j h_j$.

证明 事实上应用泰勒展式有

$$h_i[x_{i-1}, x_i]f = h_i f'(x_i) - \frac{h_{i-1}h_i}{2!} f''(x_i) + \frac{h_{i-1}^2 h_i}{3!} f'''(\xi_1), \quad x_{i-1} < \xi_1 < x_i,$$

$$h_{i-1}[x_i, x_{i+1}]f = h_{i-1} f'(x_i) + \frac{h_{i-1}h_i}{2!} f''(x_i) + \frac{h_{i-1}h_i^2}{3!} f'''(\xi_2), \quad x_i < \xi_2 < x_{i+1}.$$

上面两式相加并除以 $h_i + h_{i-1}$ 便有

$$\beta_i - f'(x_i) = \frac{h_{i-1}h_i}{3!} f'''(\xi), \quad x_{i-1} < \xi < x_{i+1},$$

注意到引理 2，定理便得证。

在等距情况下，Bessel 插值为

$$\left.\begin{aligned} &s(x_i) = f(x_i),\ s(x_{i+1}) = f(x_{i+1}); \\ &s'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},\ s'(x_{i+1}) = \frac{y_{i+2} - y_i}{2h}. \end{aligned}\right\}$$

如果想把逼近的精度提高到 $O(h^4)$，只须将 $s'(x_j)$ 逼近 $f'(x_j)$ 的精度提高到 $O(h^3)$，容易看到，若置

$$s'(x_j) = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - \frac{1}{12h}(\Delta^2 y_j - \Delta^2 y_{j-2}), \quad j = i、i+1,$$

则 $s'(x_j)$ 逼近 $f'(x_j)$ 的精度便是 $O(h^3)$.

令变换 $\frac{x - x_i}{h} = t$，则 s 的表达式可写成

$$s(x) = \frac{1}{12}(t^3, t^2, t, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 & 16 & -16 & -7 & 1 \\ -2 & 15 & -28 & 20 & -6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-2} \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

1-3 Akima 插值

Akima 在 1970 年提出了一种新的插值[12]，将 β_i 取成

$$\beta_i=\frac{\omega_{i+1}[x_{i-1},\ x_i]f+\omega_{i-1}[x_i,\ x_{i+1}]f}{\omega_{i+1}+\omega_{i-1}},$$

其中
$$\omega_j=|[x_j,\ x_{j+1}]f-[x_{j-1},\ x_j]f|.$$

这告诉我们：选择 $[x_i,\ x_{i+1}]f$ 的权因子 ω_{i-1} 时应注意函数值在左边变化状态．若左边变化缓慢，则 $[x_i,\ x_{i+1}]f$ 的权因子就小；反之权因子就大．或者讲，我们不仅用一阶差商，还考虑到二阶差商的变化状态来建立 $f'(x_i)$ 的近似值，当函数 $f(x)$ 在一侧变化特别缓慢时，要应用这一侧的函数值去描述函数的导数值。

Akima 插值仍属 C^1 的分片三次多项式局部逼近．在每个子区间 $(x_i,\ x_{i+1})$ 上与函数值 $f(x_l)$，$l=i-2,\ i-1,\cdots,i+2$ 有关．类似于 Bessel 插值，可以验明 Akima 插值的截断误差为 $O(h^2)$．

1-4 三次贝齐尔(Bézier)插值

1962 年法国人贝齐尔提出的贝齐尔曲线，被广泛应用于计算机辅助几何设计中，三次贝齐尔曲线，实质上也是一种 Hermite 型插值．

在区间 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上由四个型值点 $y_i,\ y_i^+,\ y_{i+1}^-,\ y_{i+1}$ 所确定的三次贝齐尔曲线可表为

$$s(t)=(t^3,t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_i\\ y_i^+\\ y_{i+1}^-\\ y_{i+1}\end{bmatrix},$$

其中 $t=\dfrac{x-x_i}{h_i}$。

它可以理解为下列 Hermite 型插值

$$\left.\begin{array}{l} s(x_i)=y_i,\ s(x_{i+1})=y_{i+1}, \\ s'(x_i)=3(y_i^+-y_i)/h_i,\ s'(x_{i+1})=3(y_{i+1}-y_{i+1}^-)/h_i, \end{array}\right\}$$

即可得

$$s(t)=(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ 3(y_i^+-y_i) \\ 3(y_{i+1}-y_{i+1}^-) \end{bmatrix}$$

$$=(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_i^+ \\ y_{i+1}^- \\ y_{i+1} \end{bmatrix}.$$

这说明，三次贝齐尔曲线实质上也是一种特殊的 Hermite 插值曲线.

1-5 τ 样条

在几何外形设计中，模拟外形的拟合曲线常常出现了多余的拐点. 在插值或最小二乘逼近中，常常通过将型值进行适当的修改或调整权因子来避免多余拐点的产生；有时，对最小二乘的目标函数给予恰当的约束限制，将问题转化为优化计算的问题. 但这样做，其计算量是很大的. 苏步青教授提出了三次参数样条曲线，引进了二个可调整的参数，找到了无多余拐点区域[2].

这里介绍另一办法，在产生多余拐点的区域 $(x_i,\ x_{i+1})$ 中，适当增加一个样条结点 $\xi(x_i<\xi<x_{i+1})$，并在 $(x_i,\ \xi)$，$(\xi,\ x_{i+1})$ 上分别用两个不同的三次多项式去逼近. 由于增加了自由度，灵活适应性增强了，因而可能消除多余的拐点. 这样构成的曲线称之为 τ 三次样条 (A taut cubic spline) 或三次保

凸插值样条曲线.

假定给定函数$f(x)$的一组点$(x_i, f(x_i))$, $i=0, \cdots, N$ $(x_j<x_{j+1})$. 利用差商与导数的联系有

$$[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]f=\frac{f''(\eta_i)}{2}, \quad x_{i-1}<\eta_i<x_{i+1}.$$

利用上式,我们对多余拐点作如下规定.

定义 1 设$y=f(x)$的拟合曲线为$s(x)$, 记

$$\delta_i=[x_i, x_{i+1}]f-[x_{i-1}, x_i]f,$$

若当$\delta_i\delta_{i+1}>0$时, $s(x)$在(x_i, x_{i+1})中无拐点; 而当$\delta_i\delta_{i+1}<0$时, $s(x)$在(x_i, x_{i+1})中有一拐点; 此外, 当$\delta_i\delta_{i+1}=0$时, 不论$s(x)$在(x_i, x_{i+1})中有无拐点, 都称$s(x)$为保凸拟合. 当$\delta_i\delta_{i+1}>0$时, $s(x)$在(x_i, x_{i+1})中的拐点称为多余拐点; 而$\delta_i\delta_{i+1}<0$时, $s(x)$在(x_i, x_{i+1})中的拐点则称为允许拐点.

下面我们首先来分析一个特殊三次Hermite插值问题的拐点性质. 由(1.2)式知道在[0, 1]上满足

$$\left.\begin{array}{l} s(0)=s(1)=0, \\ s'(0)=s_0, \ s'(1)=s_1 \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

的三次Hermite插值曲线可表为

$$s(x)=(s_0+s_1)x^3-(2s_0+s_1)x^2+s_0x. \tag{1.14}$$

由于$s''(0)=-2(2s_0+s_1)$, $s''(1)=2(s_0+2s_1)$, 故由(1.14)定义的$s(x)$在$(0, 1)$上无拐点的充要条件是

$$(2s_0+s_1)(s_0+2s_1)\leqslant 0. \tag{1.15}$$

引理 6 满足插值条件(1.13)的函数$s(x)$在$(0, 1)$上产生多余拐点的充要条件是

$$s_0s_1<0 \quad 且 \quad 0<z<\frac{1}{3} \quad 或 \quad \frac{2}{3}<z<1, \tag{1.16}$$

这里$z=\dfrac{s_1}{s_1-s_0}$.

证明 注意到 $[0, 0, 1]f=-s_0$, $[0, 1, 1]f=s_1$, 由定义 1 知，当 $s_0s_1>0$ 而 $s(x)$ 在 $(0, 1)$ 中有拐点，则称这个拐点是多余的．由(1.15)，$s(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有拐点的充要条件是 $(2s_0+s_1)(s_0+2s_1)>0$，或即 $(2-3z)(1-3z)>0$，解之得 $0<z<\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}<z<1$．证毕．

下面分两种情况来消除多余的拐点．

（i）当 $s_0s_1<0$ 且 $\frac{2}{3}<z<1$ 时，我们将 $s(x)$ 取成二个分段三次多项式，其结点为 ξ，$0<\xi<1$，且 $s(x)\in C^2[0, 1]$．记

$$s(x)=Ax+B(1-x)+C\varphi(x)+D(1-x)^3, \quad (1.17)$$

其中

$$\varphi(x)=\alpha x^3+(1-\alpha)\left(\frac{x-\xi}{1-\xi}\right)_+^3, \quad (1.18)$$

A、B、C、D、ξ、α 为待定参数，为使 $\varphi(x)$ 的计算稳定，将它看成函数 x^3 和 $\left(\frac{x-\xi}{1-\xi}\right)_+^3$ 的凸性组合，即取 $0\leqslant\alpha\leqslant1$．

通过计算可得 $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$，$\varphi(1)=1$，$\varphi''(x)\geqslant0$，$0\leqslant x\leqslant1$．

另方面，用插值条件(1.13)代入(1.17)可得

$$\left.\begin{aligned}&B+D=0,\\&A+C=0,\\&A-B-3D=s_0,\\&A-B+C\varphi'(1)=s_1.\end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

记 $p=\varphi'(1)/3=\alpha+(1-\alpha)/(1-\xi)$，不妨先设 $p\neq\frac{1}{2}$，解方程组(1.19)可得

$$\left.\begin{aligned}-A=C&=(s_0+2s_1)/3(2p-1),\\-B=D&=-[(3p-1)s_0+s_1]/3(2p-1).\end{aligned}\right\}\quad(1.20)$$

由于 $s''(x)=C\varphi''(x)+6D(1-x)$，可得 $s''(0)=6D$, $s''(1)=C\varphi''(1)$, $s''(\xi)=C\varphi''(\xi)+6D(1-\xi)$. 因而 $s(x)$ 在 $(0, 1)$ 中无拐点的充分条件为 $C\cdot D\geqslant 0$, 即 $[(3p-1)s_0+s_1]\cdot(s_0+2s_1)\leqslant 0$. 用 z、p 在表达式代入求得 $\alpha\leqslant[1-(1-\xi)/3(1-z)]/\xi$. 具体取 $\alpha(z)=[1-(1-\xi)/3(1-z)]/\xi$, 容易求得 $C=-s_0$, $D=0$(这时 $s(x)$ 的表达式变得很简单). 另方面为了保证 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 可对 ξ 加上 $3(1-z)\geqslant 1-\xi$ 的限制，为简单计，取 $\xi(z)=1-r(1-z)$, 其中 $r\in(0, 3)$, 并称 r 为样条结点位置的参数，可由使用者根据需要自由控制. 有了 r 可依次确定 ξ、α、$\varphi(x)$, 从而确定了没有拐点的三次曲线 $s(x)$.

(ii) 当 $s_0s_1<0$, 且 $0<z<\frac{1}{3}$ 时，只要令 $\bar{s}_0=-s_1$, $\bar{s}_1=-s_0$, 这时有 $\bar{z}=\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_1-\bar{s}_0}=1-z$, 并且 $\frac{2}{3}<\bar{z}<1$, 则问题转化为(i)的情况. 可按(i)作出 $\bar{s}(x)$, 再取 $s(x)=\bar{s}(1-x)$.

综上所述，我们得到

引理 7 在$[0, 1]$中满足(1.13)的三次保凸插值曲线可表为

$$s(x)=\begin{cases}-s_0[\varphi(x)-x], & \text{当 } s_0s_1<0 \text{ 且 } \frac{2}{3}<z<1 \text{ 时;}\\ s_1[\varphi(1-x)+x-1], & \text{当 } s_0s_1<0 \text{ 且 } 0<z<\frac{1}{3} \text{ 时;}\\ (s_0+s_1)x^3-(2s_0+s_1)x^2+s_0x, & \text{其它情况,}\end{cases}\quad(1.21)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&z=\frac{s_1}{s_1-s_0}\ \text{当}\ s_0s_1<0\ \text{时},\\
&\xi=1-r\cdot\min\{z,\ 1-z\},\quad r\in(0,\ 3),\\
&\alpha=\left(1-\frac{r}{3}\right)\Big/\xi,\\
&\varphi(x)=\alpha x^3+(1-\alpha)\left(\frac{x-\xi}{1-\xi}\right)_+^3.
\end{aligned}\right\}$$

下面对上述特殊三次插值问题加以推广，设给定数据 $x_i,\ y_i=f(x_i),\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，要构造分段三次保凸插值曲线 $s_1(x)$，满足 $s_1(x_i)=y_i,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$. 先考虑 $s_1(x)$ 在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上的构造. 记

$$\left.\begin{aligned}
&s_0=(y_i'-[x_i,\ x_{i+1}]f)h_i,\\
&s_1=(y_{i+1}'-[x_i,\ x_{i+1}]f)h_i,\\
&\quad y_i'、y_{i+1}'\ \text{均系待定参数}
\end{aligned}\right\}\tag{1.22}$$

并按引理 7 在[0, 1]上构造三次曲线 $s(x)$，又令

$$s_1(x)=s\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)+y_i+(x-x_i)[x_i,\ x_{i+1}]f,$$
$$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\tag{1.23}$$

容易验证 $s_1(x_j)=y_j,\ s_1'(x_j)=y_j',\ j=i,\ i+1$.
由于 $s_1(x)$，$s(x)$ 的拐点性质相同(它们的不同仅是在 x 轴上拉伸或压缩并且仅差一个线性函数)，即是说，当 $s_0s_1>0$ 时，$s_1(x)$ 在 $(x_i,\ x_{i+1})$ 中有一拐点，而当 $s_0s_1<0$ 时，$s_1(x)$ 在 $(x_i,\ x_{i+1})$ 中无拐点. 无疑，我们还不能说 $s_1(x)$ 具有定义 1 所述的保凸性质. 为此，选取参数

$$y_j'=(h_j[x_{j-1},\ x_j]f+h_{j-1}[x_j,\ x_{j+1}]f)/(h_{j-1}+h_j),$$
$$j=i,\ i+1,\tag{1.24}$$

由于 y_j' 的上述取法，(1.22)式变为

$$\left.\begin{array}{l} s_0=(y_i'-[x_i,\ x_{i+1}]f)h_i=-h_i^2[x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}]f, \\ s_1=(y_{i+1}'-[x_i,\ x_{i+1}]f)h_i=h_i^2[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}]f. \end{array}\right\} \quad (1.22)'$$

这时条件 $s_0s_1>0$ 等价于 $\delta_i\delta_{i+1}<0$，$s_0s_1<0$ 等价于 $\delta_i\delta_{i+1}>0$，所以 $s_1(x)$ 为 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上的三次保凸插值曲线.

定理 2 在区间 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上满足 $s_1(x_j)=y_j$，$s_1'(x_j)=(h_j[x_{j-1},\ x_j]f+h_{j-1}[x_j,\ x_{j+1}]f)/(h_{j-1}+h_j)$，$j=i,\ i+1$ 的三次保凸插值曲线 $s_1(x)$ 可按下面方法来构造：令

$$s_0=-h_i^2[x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}]f,\ s_1=h_i^2[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}]f,$$

并按引理 7，在 $[0,\ 1]$ 中构造三次曲线 $s(x)$，则

$$s_1(x)=s\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)+y_i+(x-x_i)[x_i,\ x_{i+1}]f$$

为所求的三次保凸插值曲线.

按定理 2 构造出来的三次曲线 $s_1(x)$，在无多余拐点的区间，是导数条件由(1.24)式确定的一般三次 Hermite 插值曲线，在产生多余拐点的区间，$s_1(x)$ 增加了一个样条结点 $\xi\cdot\frac{x-x_i}{h_i}$ 或 $(1-\xi)\frac{x-x_i}{h_i}$.

例 1 给定函数数据如下

表 2

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0	0	0.001	10	21	33

在 $[2,\ 3]$ 上可求得 $s_0=-0.0005$，$s_1=4.999$，$z=0.9999$，取 $r=2.5$，算得 $\xi=0.99975$，$\alpha=0.1667$，所以在 $[2,\ 3]$ 上的三次保凸样条曲线可表为

$$\begin{aligned} s_1(x)=&8.335\times10^{-5}(x-1)^3+4.1665 \\ &\times10^{-4}\left(\frac{x-1.99975}{0.00025}\right)_+^3+5\times10^{-4}(x-1). \end{aligned}$$

在 [3, 4] 上有 $s_0=-4.999$, $s_1=0.5005$, $z=0.091$, 取 $r=2.5$, $\xi=0.7725$, $\alpha=0.2157$, 相应的保凸曲线为

$$s_1(x)=1.0783(3-x)^3+3.9207\left(\frac{2.2275-x}{0.2275}\right)_+^3$$
$$+14.998x-34.994.$$

在[4, 5] 中有 $s_0=-0.5005$, $s_1=0.5$, $z=0.4975$, 求得的保凸曲线为

$$s_1(x)=1.0005x^3+0.501x^2-0.5005x.$$

从上例看出，在两端曲率变化剧烈的区间[2, 3]和[3, 4]，为使曲线保凸，就需要增加一个样条结点 $x=1.99975$ 和 $x=2.2275$, 这相当于放样工人在样条拐弯较剧烈的地方增加一个压铁. 而在比较平坦的区间 [4, 5]，就不需要增加样条结点了.

§2 磨光曲线及其几何特征

从§1的讨论中，我们明白，要使 C^1 类的分片三次样条函数属于 C^2, 必须对 β_j 加以限制，从而导致了全局插值. 能否放宽对型值的限制，使全局逼近问题变成局部逼近问题呢? 文献 [3] 中提出了数据拟合的磨光法，利用积分来提高逼近曲线的光滑度，又利用差商来保证曲线的逼近度. 假定给定 $y=f(x)$ 在等距节点 $x_i=x_0+ih$ 的一组型值(x_i, y_i). 将其联成折线段(具有保直、保单调、保凸但光滑度差的曲线):

$$y=s_1(x)=\sum_{i=0}^{N}y_i\Omega_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right),$$

对其积分 $k-1$ 次，接着作 $k-1$ 次以步长为 h 的中心差分，记之为 $s_k(x)$, 称 $s_k(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 次磨光曲线，有

$$y=s_k(x)=\sum_{i=0}^{N} y_i\Omega_k\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \tag{2.1}$$

这里 $\Omega_k(x)$ 是第1章§2的 B 样条函数. 特别, 当 $k=3$ 时有

$$s_3(x_i)=y_i+\frac{1}{6}\Delta^2 y_{i-1},\quad s_3'(x_i)=\frac{\Delta y_i+\Delta y_{i-1}}{2h},$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1. \tag{2.2}$$

但由(2.1)知 $s(x)\in C^2[a,\ b]$, 由此可见, 如果被拟合的曲线不一定通过型值点(在外形设计和实验数据处理问题中是允许这样做的), 就能在提高曲线光滑度的同时使曲线呈现局部特征, (2.2)指出: 三次磨光曲线(国际上称为三次 B 样条曲线)实际上是 Hermite 型的分片三次插值曲线.

类似于引理2, 注意到 $s_3(x_i)-y=O(h^2)$, $s'(x_i)-y_i'=O(h^2)$, 读者不难验证三次磨光曲线的截断误差为 $O(h^2)$.

2-1 磨光曲线的局部表示

为了公式的统一起见, 记

$$\nu_0=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\\ 0, & \text{当 } k \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

由于 $\Omega_k(x)$ 的局部非零性质, 当 $x_{i+\nu_0}\leqslant x\leqslant x_{i+1+\nu_0}$ 时有

$$s_k(x)=\sum_{j=i+\nu_0-\frac{k-1}{2}}^{i+\nu_0+\frac{k+1}{2}} y_j\Omega_k\left(\frac{x-x_j}{h}\right). \tag{2.3}$$

令 $t=(x-x_{i+\nu_0})/h$, 则当 $x_{i+\nu_0}\leqslant x\leqslant x_{i+\nu_0+1}$ 时, $s_k(x)$ 是关于 t 的 k 次多项式, 且 $0\leqslant t\leqslant 1$. 故(2.3)可表示为

$$s_k(t)=(t^k,\ t^{k-1},\ \cdots,\ t,\ 1)$$
$$\times A\left(y_{i+\nu_0-\frac{k-1}{2}},y_{i+\nu_0-\frac{k-1}{2}+1},\ \cdots,\ y_{i+\nu_0+\frac{k+1}{2}}\right)^T, \tag{2.4}$$

其中 $$A=\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k0} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

为了求出 $a_{pq}(p, q=0, 1, \cdots, k)$的表达式，记

$$T=(t^k, t^{k-1}, \cdots, t, 1),$$

$$Y=(y_{i+\nu_0-\frac{k-1}{2}}, y_{i+\nu_0-\frac{k-1}{2}+1}, \cdots, y_{i+\nu_0+\frac{k+1}{2}})^T,$$

$$F=TA=(F_0(t), F_1(t), \cdots, F_k(t)).$$

由第1章中 $\Omega_k(x)$的表达式可得

$$\begin{aligned} F_q(t) &= \sum_{l=0}^{k+1}(-1)^l\binom{k+1}{l}(t+k-q-l)_+^k/k! \\ &= \sum_{l=0}^{k-q}(-1)^l\binom{k+1}{l}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(k-q-l)^p t^{k-p}/k! \\ &= \sum_{p=0}^{k}\left(\sum_{l=0}^{k-p}(-1)^l\binom{k+1}{l}\binom{k}{p}(k-q-l)^p/k!\right)t^{k-p}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

故有

$$a_{pq}=\sum_{l=0}^{k-q}(-1)^l\binom{k+1}{l}\binom{k}{p}(k-q-l)^p/k!, \quad p、q=0, 1, \cdots, k. \tag{2.6}$$

由 $\Omega_k(x)$的对称性，a_{pq} 还可表示为

$$a_{pq}=\sum_{l=0}^{q}(-1)^l\binom{k+1}{l}(-1)^{k-p}\binom{k}{p}(q+1-l)^p/k!, \quad p、q=0, 1, \cdots, k. \tag{2.7}$$

由于 $s_k(x)$的代数精确度为1，令 $f(x)\equiv1$ 可得

$$1=TAY=T\left(\sum_{q=0}^{k}a_{0q}, \sum_{q=0}^{k}a_{1q}, \cdots, \sum_{q=0}^{k}a_{kq}\right)^T. \tag{2.8}$$

对(2.8)两端求 $p(p=0, 1, \cdots, k)$ 阶导数并令 $t=0$, 则可得下面恒等式

$$\sum_{q=0}^{k} a_{kq}=1, \tag{2.9}$$

$$\sum_{q=0}^{k} a_{pq}=0, \quad p=0, 1, \cdots, k-1. \tag{2.10}$$

上面第一式说明, 矩阵 A 的最后一行元素总和等于 1; 第二式说明, 除最后一行外其余各行元素总和为零. 这不但可以用来检验计算 A 的元素是否有错, 而且可用来说明基函数 $F_q(t)$ 具有下面性质:

$$F_0(t)+F_1(t)+\cdots+F_k(t)=1. \tag{2.11}$$

用(2.6)或(2.7)可以求得矩阵 A 全部元素, 从而得到了 $s_k(x)$ 的局部表示.

(1) $k=1$, $x\in[x_i, x_{i+1}]$ 时有

$$s_1(t)=(t, 1)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix};$$

(2) $k=2$, $x\in[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1+\frac{1}{2}}]$ 时有

$$s_2(t)=\frac{1}{2!}(t^2, t, 1)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{bmatrix};$$

(3) $k=3$, $x\in[x_i, x_{i+1}]$ 时有

$$s_3(t)=\frac{1}{3!}(t^3, t^2, t, 1)\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{bmatrix};$$

(4) $k=4$, $x\in[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1+\frac{1}{2}}]$ 时有

$$s_4(t)=\frac{1}{4!}(t^4,\ t^3,\ t^2,\ t,\ 1)$$

$$\cdot\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ -4 & -12 & 12 & 4 & 0 \\ 1 & 11 & 11 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{bmatrix};$$

(5) $k=5,\ x\in[x_i,\ x_{i+1}]$时有

$$s_5(t)=\frac{1}{5!}(t^5,\ t^4,\ t^3,\ t^2,\ t,\ 1)$$

$$\cdot\begin{bmatrix} -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 5 & -20 & 30 & -20 & 5 & 0 \\ -10 & 20 & 0 & -20 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & -60 & 20 & 10 & 0 \\ -5 & -50 & 0 & 50 & 5 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-2} \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{bmatrix}.$$

由磨光样条的矩阵表示法可以说明，它与国内外流行的 B 样条曲线是一致的. 用它来作数值计算也是方便的，这时有 $t=\mathrm{FR}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$, $i=\mathrm{INT}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$, 它们分别表示 $(x-x_0)/h$ 的小数部分和整数部分. 并且每求一次导数，T 的列数减 1, A 也减少最末一行，即每求一次导数，矩阵运算可以减少一阶.

此外，应用磨光样条的这种矩阵表示，可用来研究一般样条的零点，极值点，拐点的位置，这时只要将 Y 中的 y_i 换成一般样条的系数 c_i 就行了.

2-2 磨光曲线几何特征

由上面讨论，我们知道，当

$$x \in [x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}], \quad t = (x - x_{i+\frac{1}{2}})/h$$

时，二次磨光样条可表示为如下差分形式：

$$s_2(t) = \frac{1}{2!}(t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta^2 y_i t^2 + 2\Delta y_i t + \Delta y_i + 2y_i). \tag{2.12}$$

由(2.12)不难得到 $s_2(x)$ 有如下的几何特征[4]：

(1) **保单调性** 若 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+2}]$ 单调，则 $s_2(x)$ 在 $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}]$ 单调；若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 单调或序列 $\{y_i\}_0^N$ 单调，则 $s_2(x)$ 在 $\left[a+\frac{h}{2}, b-\frac{h}{2}\right]$ 单调。

(2) **保直性** 若 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+2}]$ 为直线，则 $s_2(x)$ 在 $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}]$ 与 $f(x)$ 重合；若 $y_i = y_{i+1} = y_{i+2}$，则 $s_2(x)$ 在 $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}]$ 恒等于 y_i；若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为直线，则 $s_2(x)$ 在 $\left[a+\frac{h}{2}, b-\frac{h}{2}\right]$ 与 $f(x)$ 重合。

(3) **极值性质** 若 $f(x) \in C^1[a, b]$，且没有极值存在，则 $s_2(x)$ 在 $\left[a+\frac{h}{2}, b-\frac{h}{2}\right]$ 也没有极值存在。$s_2(x)$ 在 $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}]$ 有极小(大)点的充要条件是

$y_{i+1} \leqslant y_i,\ y_{i+2}(\geqslant 0)$ 且 $y_i,\ y_{i+1},\ y_{i+2}$ 不全相等，这时极点位置 $x^* = x_{i+\frac{1}{2}} - h\dfrac{\Delta y_i}{\Delta^2 y_i}$。如果 $f(x) \in C^3[a, b]$，则 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+2}]$ 有极小点 $\tilde{x}$，且为 $f''(\tilde{x}) \neq 0$ 时，有 $x^* - \tilde{x} = O(h^2)$。

下面分析三次磨光样条的几何特征。

注意，当$x\in[x_i, x_{i+1}]$，$t=\frac{x-x_i}{h}$时，三次磨光样条可表示为下面差分形式：

$$s_3(t)=\frac{1}{3!}(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & 6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{i-1}\\ y_i\\ y_{i+1}\\ y_{i+2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}(t^3\Delta^3y_{i-1}+3t^2\Delta^2y_{i-1}$$

$$+3t(\Delta y_i+\Delta y_{i-1})+\Delta^2y_{i-1}+6y_i, \qquad (2.13)$$

$$s_3'(t)=\frac{1}{2}(t^2\Delta^3y_{i-1}+2t\Delta^2y_{i-1}+\Delta y_i+\Delta y_{i-1})$$

$$=\frac{1}{2}[(1-t^2)\Delta y_{i-1}+2t(1-t)\Delta y_i+t^2\Delta y_{i+1}+\Delta y_i],$$

$$(2.14)$$

$$s_3''(t)=t\Delta^3y_{i-1}+\Delta^2y_{i-1}. \qquad (2.15)$$

由(2.13)—(2.15)不难得到$s_3(x)$有如下几何特征：

(1) **保单调性** 若$f(x)$在$[x_{i-1}, x_{i+2}]$单调，则$s_3(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$单调，若$f(x)$在$[a, b]$单调或序列$\{y_i\}_1^N$单调，则$s_3(x)$在$[a+h, b-h]$单调.

(2) **保直性质** 若$f(x)$在$[x_{i-1}, x_{i+2}]$为直线，则$s_3(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$与$f(x)$重合，若$y_{i-1}=y_i=y_{i+1}=y_{i+2}$，则$s_3(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$恒等于$y_i$，若$f(x)$于$[a, b]$为直线，则$s_3(x)$在$[a+h, b-h]$为直线.

(3) **极值性质** 若$f(x)\in C^1[a, b]$且无极值存在，则$s_3(x)$在$[a+h, b-h]$也无极值存在.

(4) **拐点性质** $s_3(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$有拐点存在的充要条件是

$$\Delta^3 y_{i-1} \neq 0,\ 0 \leqslant \frac{-\Delta^2 y_{i-1}}{\Delta^3 y_{i-1}} \leqslant 1.$$

且极值点位置 $x^{**} = x_i - \frac{h\Delta^2 y_{i-1}}{\Delta^3 y_{i-1}}$. 若 $f(x) \in C^4[a, b]$, 且在 $[x_i, x_{i+1}]$ 有它的拐点 $\hat{x}$, 且 $f'''(\hat{x}) \neq 0$, 则又有 $x^{**} - \hat{x} = O(h^2)$.

例 2　设 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1, a = -2, b = 2, h = 0.5, N = 8$. 试决定三次磨光样条的拐点位置. 容易算得 $x_1^{**} = -0.5277778$, $x_2^{**} = 0.05277778$, 而 $f(x)$ 的拐点为 $\hat{x}_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0.5773502$. 可见 $s_3(x)$ 能模仿 $f(x)$ 的拐点位置. 若将 h 减少, 精确度还能再提高. 同样, 也可采用外推算法或盈亏修改法来提高精度.

在上面所讨论的磨光法中, 我们只讨论给定数据是等距的情形, 对于非等距的情况, 当然可采用非等距节点的磨光法[3], 但是为了公式的统一起见, 我们引进参变量磨光法, 把非等距的问题化为等距来处理. 这里只研究序号参变量磨光法. 为了叙述方便, 只研究平面曲线的情况.

2-3　序号参变量磨光公式

设在平面 xy 上给定一组向量 $r_i = (x_i, y_i)$, 将各向量的端点依次连成一折线, 它们可以是开的或闭的(图 1).

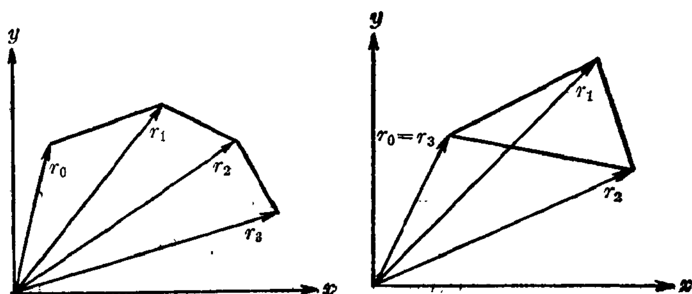
引进参变量 t, 使对应于顶点 r_i 的参数值 $t = i$, 从而折线可表示为向量的形式

$$s_1(t) = \sum_i r_i \Omega_1(t-i), \tag{2.16}$$

其相应的磨光公式便是

$$s_k(t) = \sum_i r_i \Omega_k(t-i). \tag{2.17}$$

如果是闭型的, 比如说, 存在正整数 N, 使 $r_N = r_0$, 则我们可将给定向量组 $\{r_i\}_0^N$ 以 N 为周期进行延拓, 使 $r_{i+Nl} = r_i$.



(a) 开型 $S_1=\sum_{i=0}^{3} r_i\Omega_1(t-i)$　　(b) 闭型 $S_1=\sum_{i=0}^{2} r_i\Omega_1(t-i)$

图1　折线的 B 样条表示

考虑到这种周期性，(2.17)可以改写成

$$s_k(t)=\sum_{i=0}^{N} r_i\dot{\Omega}_k(t-i),\quad 0\leqslant t\leqslant N, \tag{2.18}$$

其中
$$\dot{\Omega}_k(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Omega_k(t+Nl)$$

为 t 的周期函数.

$k=2, 3$ 的公式(2.17)或(2.18)最为常用. 完全平行于2.1及2.2的讨论，用 $s_2(t)$ 和 $s_3(t)$ 去拟合给定点组 $\{r_i\}=\{(x_i, y_i)\}$ 具有下面性质:

(i) **逼近性质**

$$s_2(i)-r_i=\frac{1}{8}(r_{i-1}-2r_i+r_{i+1}),$$

$$s_3(i)-r_i=\frac{1}{6}(r_{i-1}-2r_i+r_{i+1}).$$

(ii) **相切性质**　$s_2(t)$ 切于每一折线段的中点，即

$$s_2\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(r_i+r_{i+1}),\quad s_2'\left(i+\frac{1}{2}\right)=r_{i+1}-r_i,$$

$s_3(t)$ 则近似平行通过每一折线中点，即

$$s_3\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(r_i+r_{i+1})+\frac{1}{48}(r_{i-1}+r_{i+2}-r_i-r_{i+1}),$$

$$s_3'\left(i+\frac{1}{2}\right)=(r_{i+1}-r_i)+\frac{1}{8}(r_{i+2}-3r_{i+1}+3r_i-r_{i-1}).$$

(iii) **保凸性质**

$$s_2''(i)=r_{i+1}-2r_i+r_{i-1},$$

$$s_3''(i)=r_{i+1}-2r_i+r_{i-1}.$$

关于 $s_2(t)$，$s_3(t)$ 的性质(i)、(ii)、(iii)的几何意义，完全类似于2.2的讨论，这里我们不再详述.

在外形设计中，有时不仅要求拟合曲线比较光顺，而且在某种特殊的情况下要求保留某些"尖点"，采用参变量磨光法，可方便地适应这样的需要.

(iv) **保尖性质** 设给定点组 $\{r_j\}=\{(x_j, y_j)\}$，$j=0, 1, \cdots, N$，对于 $s_2(t)$，如果在某一点 $r_i=(x_i, y_i)$，$i\in\{1, \cdots, N-2\}$ 重复编号一次，即 $r_i=r_{i+1}$，则 $s_2(t)=\sum_{j=0}^{N} r_j\Omega_2(t-j)$ 在区间 $\left[i-\frac{1}{2}, i+\frac{3}{2}\right]$ 形成一折角，且折角顶点为 $s_2\left(i+\frac{1}{2}\right)=r_i$. 对于 $s_3(t)$，如果在某一点 $r_i=(x_i, y_i)$，$i\in\{1, \cdots, N-3\}$ 重复编号二次，即 $r_i=r_{i+1}=r_{i+2}$，则

$$s_3(t)=\sum_{j=0}^{N} r_j\Omega_3(t-j)$$

在区间 $[i, i+2]$ 形成一折角，且折角顶点为 $s_3(i+1)=r_i$.

证明 容易看出 $s_2(t)$ 的结点为 $t_j=j+\frac{1}{2}$，$j=0, \cdots, N-1$. 因此 $s_2(t)$ 在区间 $\left[i-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right]$ 和区间 $\left[i+\frac{1}{2}, i+\frac{3}{2}\right]$ 分别是二次多项式，由性质(i)、(ii)有

$$s_2\left(i-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(r_{i-1}+r_i),$$

$$s_2'\left(i-\frac{1}{2}\right)=r_i-r_{i-1},$$

$$s_2\left(i+\frac{1}{2}\right)=r_i,$$

由二次插值的唯一性，上面三个条件表明，$s_2(t)$ 在区间 $\left[i-\frac{1}{2},\ i+\frac{1}{2}\right]$ 中的二次多项式退化为与连结点 r_{i-1}、r_i 的线段重合的直线段；同样有

$$s_2\left(i+\frac{1}{2}\right)=r_i,$$

$$s_2\left(i+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}(r_{i+1}+r_{i+2}),$$

$$s_2'\left(i+\frac{3}{2}\right)=r_{i+2}-r_i,$$

因此，$s_2(t)$ 在区间 $\left[i+\frac{1}{2},\ i+\frac{3}{2}\right]$ 的二次多项式退化为与联结点 r_{i+1}、r_{i+2} 的线段重合的直线段，参见如图 2(*a*)。

对于 $s_3(t)$，容易看出，$t_j=j$，$j=1, 2, \cdots, N-1$ 是它的结点，因此 $s_3(t)$ 在区间 $[i,\ i+1]$ 和区间 $[i+1,\ i+2]$ 分别是三次多项式，通过计算可得

$$s_3(i)=r_i-\frac{1}{6}(r_i-r_{i-1}),$$

$$s_3'(i)=\frac{1}{2}(r_i-r_{i-1}),$$

$$s_3\left(i+\frac{1}{2}\right)=r_i-\frac{1}{48}(r_i-r_{i-1}),$$

$$s_3'\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}(r_i-r_{i-1}),$$

由三次插值的唯一性，上面四个条件表明，$s_3(t)$ 在区间 $[i,\ i+1]$ 中的三次多项式退化为与联结点 r_{i-1}、r_i 的线段重合的

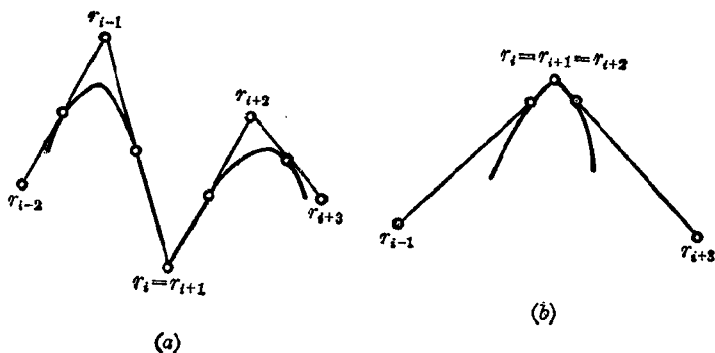


图 2

直线段；同样可得

$$s_3\left(i+\frac{3}{2}\right)=r_{i+2}+\frac{1}{48}(r_{i+3}-r_{i+2}),$$

$$s_3'\left(i+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{8}(r_{i+3}-r_{i+2}),$$

$$s_3(i+2)=r_{i+2}+\frac{1}{6}(r_{i+3}-r_{i+2}),$$

$$s_3'(i+2)=\frac{1}{2}(r_{i+3}-r_{i+2}),$$

因此，$s_3(t)$在区间$[i+1,\ i+2]$的三次多项式退化为与联结点 r_{i+2}、r_{i+3} 的线段重合的直线段；最后算得 $s_3(i+1)=r_i$，参见图 2(b)，性质(iv)证毕。

图 3 中说明了，对正五角星的顶点加以适当编号，经一次磨光后仍为正五角星，即

$$s_2(t)=\sum_{i=0}^{11}r_i\Omega_2(t-i),\quad 0\leqslant t\leqslant 11,$$

仍为正五角星。

图 4 中，对正方形的一个顶点重复编号一次，经一次磨光后在该顶点"保尖"，其一次磨光曲线被表示为

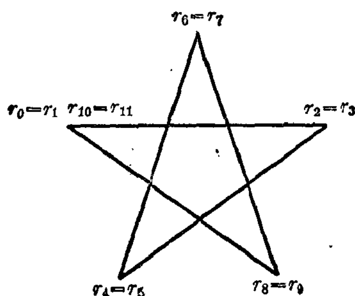


图 3

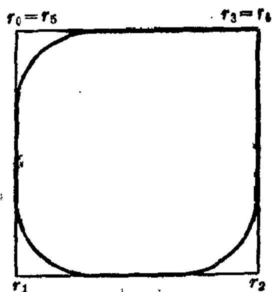


图 4

$$s_2(t)=\sum_{i=0}^{5}r_i\Omega_2(t-i),\quad 0\leqslant t\leqslant 5.$$

§3 含有控制参数的样条曲线

如果在分片 Hermite 插值曲线中，对导数条件引进一个参数，便可以控制曲线的几何形状、又例如，通过单位算子的分解和局部泛函的选择，可构造出各式各样的样条曲线．这种曲线，计算简单，具有局部逼近特征，通过增加样条结点和降低光滑度，使曲线含有逼近和插值的自适应性。

3-1 带有控制参数的三次样条曲线

设给定区间$[a, b]$的一等距分划

$$\pi:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,\quad x_i=x_0+ih,$$
$$h=(b-a)/N,$$

及对应一组型值$y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, \cdots, N$．我们来讨论带有参数因子 λ 的三次样条曲线的构造法[5]．

先研究在分划π的子区间$[x_i, x_{i+1}]$上三次样条曲线的构造．为此，令$t=(x-x_i)/h$，当$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$时，则$0\leqslant t\leqslant 1$，问

题转为区间 [0, 1] 上关于 t 的三次多项式的构造，其一般表示式为：

$$p(t)=(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)(A,\ B,\ C,\ D)^T, \tag{3.1}$$

其中 A、B、C、D 为四个待定常数. 依 § 1 所述，我们建立插值问题：

$$\left.\begin{aligned} p(0)&=y_i+\lambda\Delta^2 y_{i-1},\\ p(1)&=y_{i+1}+\lambda\Delta^2 y_i,\\ p'(0)&=(y_{i+1}-y_{i-1})/2,\\ p'(1)&=(y_{i+2}-y_i)/2, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中 λ 为控制参数.

把(3.2)代入(3.1)式，可以解得：

$$p(t)=(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)M(y_{i-1},\ y_i,\ y_{i+1},\ y_{i+2})^T. \tag{3.3}$$

其中

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4\lambda-1 & -12\lambda+3 & 12\lambda-3 & -4\lambda+1\\ -6\lambda+2 & 18\lambda-5 & -18\lambda+4 & 6\lambda-1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 2\lambda & 2-4\lambda & 2\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

方程(3.3)称为区间 $[a,\ b]$ 上带有控制参数 λ 的三次样条曲线的分段表达式. 其计算是方便的，只要求出

$$t=\mathrm{FR}\left(\frac{x-x_0}{h}\right),\quad i=\mathrm{INT}\left(\frac{x-x_0}{h}\right),$$

符号 $\mathrm{FR}(x)$, $\mathrm{INT}(x)$ 分别表示 x 的小数部分和整数部分.

为了进一步分析(3.3)的性质，利用 B 样条基函数 $\Omega_2(x)$、$\Omega_3(x)$，导出带有控制参数的三次样条曲线在区间 $[a,\ b]$ 的整体表达式

$$p(x)=\sum_{j=1}^{N+1} y_j\left[3(1-4\lambda)\Omega_3\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\right.$$

$$\left.-(1-6\lambda)\left(\Omega_2\left(\frac{x-x_j-\frac{1}{2}}{h}\right)+\Omega_2\left(\frac{x-x_j+\frac{1}{2}}{h}\right)\right)\right], \tag{3.4}$$

其中 y_{-1}, y_{N+1} 是适当延拓的型值.

利用(3.4)或(3.3)，直接计算可得：

$$\left.\begin{aligned}
&p(x_i)=y_i+\lambda\Delta^2 y_{i-1},\\
&p'(x_i)=(y_{i+1}-y_{i-1})/2h,\\
&p''(x_i)=\Delta^2 y_{i-1}/h^2+\frac{6\lambda-1}{2h^2}\Delta^4 y_{i-2},\\
&\quad\text{(左右导数平均值)},\\
&p(x_{i+\frac{1}{2}})=(y_{i+1}+y_i)/2+\frac{8\lambda-1}{16}(\Delta^2 y_{i-1}+\Delta^2 y_i),\\
&p'(x_{i+\frac{1}{2}})=\Delta y_i/h+\frac{12\lambda-1}{8h}\Delta^3 y_{i-1},\\
&p''(x_{i+\frac{1}{2}})=(\Delta^2 y_i+\Delta^2 y_{i-1})/2h^2,\\
&p'''(x_{i+\frac{1}{2}})=(3-12\lambda)\Delta^3 y_{i-1}/h^3.
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

设 $f(x)\in C^4[a,\ b]$, $y_j=f(x_j)$, 由(3.5)式及泰勒展式，可得误差估计

$$\|f^{(\alpha)}(x)-p^{(\alpha)}(x)\|_\infty=O(h^2),\quad \alpha=0,1,2. \tag{3.6}$$

由(3.5)知，对于任意的 λ, $p(x)$的代数精确度为1，逼近阶为 $O(h^2)$. 特别，当 $\lambda=0$, (3.4)成为插值曲线；取 $\lambda=\frac{1}{6}$，则曲线变为三次磨光曲线；取 $\lambda=\frac{1}{4}$，则曲线退化为二次曲线. 通过调节 λ 的值，可以控制曲线的形状. 特别，它把样条插值法与样条磨光法通过参数联系起来，应用上显得灵活.

如果给定的数据是非等距的，可类似于等距情况的讨论.

这时，记 $h_{i+1}=x_{i+1}-x_i, t=(x-x_i)/h_{i+1}$，并以 $f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$ 表示 $f(x)$ 在 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 处的二阶差商，(3.2)式改为.

$$\left.\begin{aligned}
&p(0)=y_i+\lambda h_i\cdot h_{i+1}f[x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}],\\
&p(1)=y_{i+1}+\lambda h_{i+1}\cdot h_{i+2}f[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}],\\
&p'(0)=h_{i+1}\cdot\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{h_i+h_{i+1}},\\
&p'(1)=h_{i+1}\frac{y_{i+2}-y_i}{h_{i+1}+h_{i+2}}.
\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

同样可求得非等距情况下的 λ 三次曲线的分段表示式为

$$p(t)=(t^3,\ t^2,\ t,\ 1)\begin{bmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_i+\lambda h_ih_{i+1}f[x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}]\\y_{i+1}+\lambda h_{i+1}\cdot h_{i+2}f[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}]\\h_{i+1}(y_{i+1}-y_{i-1})/(h_i+h_{i+1})\\h_{i+1}(y_{i+2}-y_i)/(h_{i+1}+h_{i+2})\end{bmatrix}.\tag{3.8}$$

同样地，当 $\lambda=0$ 时，得到插值曲线；当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$p(t)$ 退化为二次曲线；当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，得到一种保凸的拟合曲线。

3-2 单位算子分解和高精度局部逼近

在 3-1 中，我们通过参数的调整，构造出各种局部逼近曲线。下面，利用单位算子的分解，通过调整样条结点的办法来提高逼近精度，进一步引出一类磨光-插值公式。

对于$[0, b]$区间的一个等距分划

$$\pi:\quad 0=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,\ x_i=ih,\ h=\frac{b}{N}$$

及相应的一组型值 y_i, $i=0, 1, \cdots, N$ 在 k 次磨光曲线中，

引入单位算子 I 并进行分解(为讨论简单起见,令 $h=1$,研究在整个实轴上的磨光与插值). 我们有

$$s_k(x)=\sum_j y_j \Omega_k(x-j)=\sum_j y_j I\Omega_k(x-j), \tag{3.9}$$

将 I 近似分解成 k 个不同步长平均算子的组合: $I\approx\sum_{i=0}^{k-1} a_i\mu_i$. 这里 μ_i 表示以 i 为步长的平均算子, 即 $\mu_i f(x)=\left(f\left(x+\frac{i}{2}\right)+f\left(x-\frac{i}{2}\right)\right)\Big/2$, 将它代入(3.9)仍记左端为 $s_k(x)$, 有

$$s_k(x)=\sum_j y_j \Phi_k(x-j), \tag{3.10}$$

这里

$$\begin{aligned}\Phi_k(x)&=\sum_{i=0}^{k-1} a_i\mu_i\Omega_k(x)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} a_i\left(\Omega_k\left(x+\frac{i}{2}\right)+\Omega_k\left(x-\frac{i}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

再将(3.10)写成

$$s_k(x)=\frac{1}{2}\sum_j y_j\sum_{i=0}^{k-1} a_i\left(\Omega_k\left(x+\frac{i}{2}-j\right)+\Omega_k\left(x-\frac{i}{2}+j\right)\right). \tag{3.10$'$}$$

易知 $s_k(x)$属于 C^{k-1} 函数类. 这里, 增加了一倍样条结点, 却换来了 k 个参数 a_0, a_1, $\cdots$, a_{k-1} 的自由选择.

定义 2 称 $p_k(x)=\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$为 B 样条函数 $\Omega_k(x)$ 的结点多项式,其中

$$x_i=i-\frac{k-1}{2} \text{ 为 } \Omega_k(x) \text{的结点.}$$

记 $k=2m+m_0$, m 取正整数, m_0 取 0 或 1, 将 $p_k(x)$写成

$$p_k(x)=x^{m_0}\sum_{i=0}^{m} b_{2i}x^{2(m-i)}, \tag{3.11}$$

其中 b_{2i} 为确定常数, 且 $b_0=1$.

表 3

k	1	2	3	4	5
b_2		$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{5}{2}$	-5
b_4				$\frac{9}{16}$	4

例如，对常用的 $k=1, 2, \cdots, 5$; b_2, b_4 数值如表 3.

现在，设 $\Omega_k(x-j)$ 的结点多项式为

$$p_k(x-j)=\sum_{\nu=0}^{k} c_{\nu,j}x^{k-\nu}, \tag{3.12}$$

并记 $\nu=2q+q_0$, q 取正整数，q_0 取 0 或 1.

则由(3.11)容易导得

$$c_{\nu,j}=(-1)^\nu j^{q_0}\sum_{i=0}^{q}\binom{k-2i}{k-\nu}j^{2(q-i)}b_{2i}. \tag{3.13}$$

另一方面，利用 Marsden 恒等式有

$$x^\nu=(-1)^\nu\sum_j c_{\nu,j}\Big/\binom{k}{\nu}\cdot\Omega_k(x-j),\ \nu=0, 1, \cdots, k. \tag{3.14}$$

(3.13)代入(3.14)可得

$$x^\nu=\sum_j\left(j^{q_0}\sum_{i=0}^{q}\binom{k-2i}{k-\nu}\Big/\binom{k}{\nu}\cdot b_{2i}\cdot j^{2(q-i)}\right)\cdot\Omega_k(x-j). \tag{3.15}$$

在(3.10)中取 $s_k(x)=x^\nu$，即

$$x^\nu=\sum_j j^\nu\Phi_k(x-j).$$

则可得

$$x^{\nu}=\sum_{j} j^{q_0}\left(\sum_{l=0}^{k-1} a_l \sum_{i=0}^{q}\binom{\nu}{2i}\left(\frac{l}{2}\right)^{2i} j^{2(q-i)}\right)\cdot \Omega_k(x-j), \tag{3.16}$$

进一步由(3.15)、(3.16)又可得

$$\sum_{i=0}^{q}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{l}{2}\right)^{2i} a_l\binom{\nu}{2i}\cdot j^{2(q-i)}=\sum_{i=0}^{q}\binom{k-2i}{k-\nu}\bigg/\binom{k}{\nu}\cdot b_{2i} j^{2(q-i)}.$$

对比两边 $j^{2(q-i)}$ 系数并注意 $\binom{k-2i}{k-\nu}\bigg/\binom{k}{\nu}\cdot\binom{\nu}{2i}=1\bigg/\binom{k}{2i}$ 有

$$\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{l}{2}\right)^{2i} a_l=b_{2i}\bigg/\binom{k}{2i}, \quad i=0, 1, \cdots, q, \tag{3.17}$$

或即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & 1^2 & \cdots & \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & 1^4 & \cdots & \left(\frac{k-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{2q} & 1^{2q} & \cdots & \left(\frac{k-1}{2}\right)^{2q} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 \\ b_2\bigg/\binom{k}{2} \\ \vdots \\ b_{2q}\bigg/\binom{k}{2q} \end{bmatrix}.$$

由上可知，若要 $s_k(x)$ 对 x^{ν} 的逼近是精确的，则 a_i 要满足

方程(3.17)。从(3.17)还可看到，当 $\nu=2q$ 及 $\nu=2q+1$ 所得方程组完全相同，并且每当 ν 增加2，即 q 增加1时，方程组在原来的基础上增加一个方程。这就说明，若 a_i 满足方程组(3.17)，则 $s_k(x)$ 的代数精确度为 ν。

第一种情况. 令 $\nu=k$，则 $s_k(x)$ 是代数精确度为 k、带有 $k-m-1$ 个自由参数 $a_{m+1}, \cdots, a_{k-1}$ 的磨光公式，基函数 $\Phi_k(x)$ 的跨度*为 $2k$。

例如对 $k=1, 2, \cdots, 5$，容易算得 $\Phi_k(x)$ 的表达式如下：

表 4

k	$\Phi_k(x)$
1	$\Omega_1(x)$
2	$(2\mu_0-\mu_1)\Omega_2(x)$
3	$\left[\left(\frac{7}{3}+3a_2\right)\mu_0-\left(\frac{4}{3}+4a_2\right)\mu_1+a_2\mu_2\right]\Omega_3(x)$
4	$\left[\left(\frac{16}{3}-10a_3\right)\mu_0-\left(\frac{47}{9}-15a_3\right)\mu_1+\left(\frac{8}{9}-6a_3\right)\mu_2+a_3\mu_3\right]\Omega_4(x)$
5	$\left[\left(\frac{201}{30}-10a_3-45a_4\right)\mu_0-\left(\frac{208}{30}-15a_3-64a_4\right)\mu_1+\left(\frac{37}{30}-6a_3-20a_4\right)\mu_2+a_3\mu_3+a_4\mu_4\right]\Omega_5(x)$

特别地，令 $a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_{k-1}=0$，则 $s_k(x)$ 为代数精确度为 k，并且以节点和半节点为结点的不带参数磨光公式，其基函数的跨度为 $k+1+m$。

对 $k=1, 2, \cdots, 5$，容易算得 $\Phi_k(x)$ 如下：

* $\Phi(x)$ 的跨度指 $\Phi(x)$ 的非零区间。

表 5

k	$\Phi_k(x)$
1	$\Omega_1(x)$
2	$(2\mu_0-\mu_1)\Omega_2(x)$
3	$\left(\frac{7}{3}\mu_0-\frac{4}{3}\mu_1\right)\Omega_3(x)$
4	$\left(\frac{16}{3}\mu_0-\frac{47}{9}\mu_1+\frac{8}{9}\mu_2\right)\Omega_4(x)$
5	$\left(\frac{201}{30}\mu_0-\frac{208}{30}\mu_1+\frac{37}{30}\mu_2\right)\Omega_5(x)$

第二种情况. 设 $k=2m+m_0$, m 取整数, $m_0=0, 1$, 取 $\Phi_k(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} a_{2i}\cdot\mu_{2i}\Omega_k(x)$, 那末, a_{2i} 由下面方程来确定

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \cdots & m^2 \\ 0 & 1^4 & 2^4 & \cdots & m^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1^{2m} & 2^{2m} & \cdots & m^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2\Big/\binom{k}{2} \\ \vdots \\ b_{2m}\Big/\binom{k}{2m} \end{bmatrix},$$

那么 $s_k(x)$ 是代数精确度为 k, 并以半节点或节点为结点的不带参数的磨光公式,其基函数的跨度为 $k+1+2m$.

对 $k=2, 3, 4, 5$, 容易算得 $\Phi_k(x)$ 如表 6.

第三种情况. 如果在第一种情况中, 令 $\Phi_k(\nu)=0$, $\nu=m+1, m+2, \cdots, k-1$. 那末容易验明 $\Phi_k(0)=1$, $\Phi_k(\nu)=0$, $\nu=1, 2, \cdots, m$. 这时(4.2)成为插值公式. 对于 $k=1, 2, \cdots, 5$, 将插值基函数列为表 7.

表 6

k	$\Phi_k(x)$
2	$\left(\frac{5}{4}\mu_0-\frac{1}{4}\mu_2\right)\Omega_2(x)$
3	$\left(\frac{4}{3}\mu_0-\frac{1}{3}\mu_2\right)\Omega_3(x)$
4	$\left(\frac{47}{576}\mu_0-\frac{107}{144}\mu_2+\frac{319}{192}\mu_4\right)\Omega_4(x)$
5	$\left(\frac{73}{40}\mu_0-\frac{14}{15}\mu_2+\frac{13}{120}\mu_4\right)\Omega_5(x)$

表 7

k	$\Phi_k(x)$
1	$\Omega_1(x)$
2	$(2\mu_0-\mu_1)\Omega_2(x)$
3	$\left(\frac{10}{3}\mu_0-\frac{8}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2\right)\Omega_3(x)$
4	$\left(\frac{56}{9}\mu_0-\frac{59}{9}\mu_1+\frac{64}{45}\mu_2-\frac{4}{45}\mu_3\right)\Omega_4(x)$
5	$\left(\frac{37679}{3120}\mu_0-\frac{2938}{195}\mu_1+\frac{717}{156}\mu_2-\frac{122}{195}\mu_3+\frac{61}{3120}\mu_4\right)\Omega_5(x)$

§4 局部线性泛函的一种构造

给定$[a, b]$的一个分划

$$\pi:\quad t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_k=a<t_{k+1}<\cdots<t_n$$
$$=b<t_{n+1}<\cdots<t_{n+k},$$

假定 $B_{i,k}(x)$ 是以 $t_i,\ t_{i+1},\ \cdots,\ t_{i+k}$ 为结点的 k 阶 B 样条，考虑函数

$$s(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j B_{j,k}(x),\quad \alpha_j \text{ 是不依赖于 } x \text{ 的参数},$$

由 B 样条的局部非零性质知，函数 $s(x)$ 在 $(t_i,\ t_{i+1})$ 上的值仅依赖于系数 $\alpha_{i-k+1},\ \cdots,\ \alpha_i$. 假定 λ_j 是 $C[t_1,\ t_{n+k}]$ 上的线性泛函，并取 $\alpha_j=\lambda_j f$，这里 $f(x)$ 是定义在 $[t_1,\ t_{n+k}]$ 上的连续函数，那末

$$y=Qf=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f B_{j,k}(x),\tag{4.1}$$

便可看成是 $y=f(x)$ 的拟合曲线. 进一步，如果 $\lambda_j f$ 仅与函数 $f(x)$ 在 $x=x_j$ 附近的值有关，则(4.1)所定义的曲线将是一种局部逼近的曲线. 一个感兴趣的问题是如何去构造这类泛函(称之为局部线性泛函)使(4.1)兼顾逼近和几何的特征，并且计算的步骤又是不复杂的.

注意到 B 样条的求导公式并记(4.1)右端的函数为 $s(x)$ 有

$$s'(x)=(k-1)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\lambda_j f-\lambda_{j-1}f}{t_{j+k-1}-t_j}B_{j,k-1}(x),\tag{4.2}$$

其中 $\lambda_0 f=\lambda_{n+1}f=0$. 假定曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是单调上升的. 注意到 B 样条的恒正性，只要选取泛函满足

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_j f\geqslant\lambda_{j-1}f,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ n,\\ \lambda_1 f\geqslant 0,\ \lambda_n f\leqslant 0,\end{array}\right\}\tag{4.3}$$

那末拟合曲线 $y=s(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上也是单调上升的. 记线性泛函

$$\mu_j f=\frac{\lambda_j f-\lambda_{j-1}f}{t_{j+k-1}-t_j},$$

进一步对 $s'(x)$ 求导数有

$$s''(x)=(k-1)(k-2)\sum_{j=1}^{n+2}\frac{\mu_j f-\mu_{j-1}f}{t_{j+k-2}-t_j}B_{j,k-2}(x),\tag{4.4}$$

其中 $\mu_0 f=\mu_{n+2}f=0$. 假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸函数(或即 $f''(x)\geqslant 0$), 那末只要选取

$$\left.\begin{aligned}&\mu_j f\geqslant \mu_{j-1}f,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ n+1,\\&\mu_1 f\geqslant 0,\ \mu_{n+1}f\leqslant 0,\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

则 $s''(x)\geqslant 0$ 在区间 $[a, b]$ 上恒成立.

回忆第1章的V.D逼近定理: 样条函数 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f B_{j,k}(x)$ 在 $[a, b]$ 上变号数目不超过 $\{\lambda_j f\}_1^n$ 的变号数目. 如果曲线 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上变号 m 次, 那末, 只要 $\{\lambda_j f\}_1^n$ 在 $[a, b]$ 上变号的数目不超过 m, 则 $s(x)$ 在 $[a, b]$ 上变号的数目也不超过 m.

泛函 $\lambda_j f$ 的一个选取办法是令

$$\lambda_j f=\sum_{i=1}^{k-1} f_{j+i},\quad f_{j+i}=f(t_{j+i}),$$

有
$$\frac{\lambda_j f-\lambda_{j-1}f}{t_{j+k-1}-t_j}=[t_{j+k-1},\ t_j]f,$$

或即
$$s'(x)=\sum_j [t_{j+k-1},\ t_j]fB_{j,k-1}(x).$$

特别, 当 $k=2$ 时有 $\lambda_j f=f_{j+1}$, 即

$$s(x)=\sum_j f(x_{j+1})B_{j,2}(x),$$

这便是连接 $(x_i, f(x_i))$, $i=1, 2, \cdots$ 的折线函数.

为了兼顾逼近方面的要求, L. L. Schumaker 曾于 1975 年提出了另一构造泛函的方法, 取

$$\lambda_j f=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ji}[z_{j1},\ \cdots,\ z_{ji}]f,$$

其中 $z_{j1}, \cdots, z_{ji}$ 是含于分划 $\{t_i\}_1^{n+k}$ 中的某些数, α_{ji} 是待定参数, 它可以这样选取使 $y=Qf=s(x)$ 具有 l 次 $(1\leqslant l\leqslant r-1)$ 的代数精度, 不难看出, 在构造这个泛函时必须利用 Marsden 恒等式.

下面，我们来叙述构作泛函 $\lambda_j f$ 的一个方法[8]．这个方法的一个优点是将一类处理数据的经典公式都包含在内，通过变动泛函来提高局部逼近曲线的精度，这跟§3利用变换基函数来提高精度的方法是截然不同的．

假定 $[a, b]$ 的分划是等距的，步长为 h，记 δ 为步长 h 的中心差分，引入差分算符

$$A_n=\sum_{j=0}^{n} c_{2j}\delta^{2j},\quad c_{2j}\text{ 是待定参数,} \tag{4.6}$$

将线性泛函 $\lambda_j f$ 取为

$$\lambda_j f=\hat{A}_n f_{j+\frac{k}{2}},\quad \hat{A}_n=\begin{cases} A_n,\ n\text{ 是偶数时,}\\ \mu A_n,\ n\text{ 是奇数时,}\end{cases} \tag{4.7}$$

这里 μ 是平均算子．差分算符 A_n 是对 f 的下标 j 作用的．

现在，对于 $k\geqslant 2$ 有

$$s(t_i)=\sum_{j=i+1-k}^{i-1}\hat{A}_n f_{j+\frac{k}{2}}B_{j,k}(t_i)$$

$$=\hat{A}_n\sum_{j=i+1-k}^{i-1}B_{j,k}(t_i)f_{j+\frac{k}{2}}=\hat{A}_n\hat{e}_k f_i,$$

这里

$$\hat{e}_k f_i=\sum_{j=i+1-k}^{i-1}B_{j,k}(t_i)f_{j+\frac{k}{2}}. \tag{4.8}$$

为了方便起见，我们列出了 $\hat{e}_k$ 前面的几个表达式

表 8

k	$\hat{e}_k$
2	I
3	μ
4	$I+\frac{1}{6}\delta^2$
5	$\mu\left(I+\frac{1}{12}\delta^2\right)$
6	$I+\frac{1}{4}\delta^2+\frac{1}{120}\delta^4$

例如，我们验证 $k=3$ 的情况，由 B 样条的递推关系有

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_3 f_i &= \sum_{j=i-2}^{i-1} f_{j+\frac{3}{2}} B_{j,3}(t_i) \\
&= \sum_{j=N-2}^{i-1} \frac{(t_i - t_j) f_{j+\frac{3}{2}} + (t_{j+2} - t_i) f_{j+\frac{1}{2}}}{t_{j+2} - t_j} B_{j,2}(t_i) \\
&= \frac{t_i - t_{i-2}}{t_i - t_{i-2}} B_{i-2,2}(t_i) \\
&\quad + \frac{(t_i - t_{i-1}) f_{i+\frac{1}{2}} + (t_{i+1} - t_i) f_{i-\frac{1}{2}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} B_{i-1,2}(t_i) \\
&= \frac{f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}}{2} = \mu f_i.
\end{aligned}
$$

按照 B 样条求导法则，我们有

$$
\begin{aligned}
s^{(m)}(t_i) &= \hat{A}_n \sum_j \left(\frac{\delta}{h}\right)^m f_{j+\frac{k-m}{2}} B_{j,k-m}(t_i) \\
&= \left(\frac{\delta}{h}\right)^m \hat{A}_n \sum_j f_{j+\frac{k-m}{2}} B_{j,k-m}(t_i) \\
&= \left(\frac{\delta}{h}\right)^m \hat{A}_n \hat{e}_{k-m} f_i, \quad m=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1.
\end{aligned}
$$

注意关系式 $\mu^2 = I + \frac{\delta^2}{4}$，我们找到了 $s^{(m)}(x)$ 在 t_i 的值，列表如下：

表 9　$\delta^m \hat{A}_n \hat{e}_{k-m}$

k	$\hat{A}_k$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
3	$\mu\varphi(0)$	$\varphi\left(\frac{1}{4}\right)$	$\mu\delta\varphi(0)$			
4	$\varphi(0)$	$\varphi\left(\frac{1}{6}\right)$	$\mu\delta\varphi(0)$	$\delta^2\varphi(0)$		
5	$\mu\varphi(0)$	$\psi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{48}\right)$	$\mu\delta\varphi\left(\frac{1}{6}\right)$	$\delta^2\varphi\left(\frac{1}{4}\right)$	$\mu\delta^3\varphi(0)$	
6	$\varphi(0)$	$\psi\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{120}\right)$	$\mu\delta\varphi\left(\frac{1}{12}\right)$	$\delta^2\varphi\left(\frac{1}{6}\right)$	$\mu\delta^3\varphi(0)$	$\delta^4\varphi(0)$

其中 $\varphi(\alpha)=c_0I+(\alpha c_0+c_2)\delta^2+\cdots$

$$+(\alpha c_{2n-2}+c_{2n})\delta^{2n}+\alpha c_{2n}\delta^{2n+2},$$

$$\psi(\alpha,\ \beta)=c_0I+(\alpha c_0+c_2)\delta^2+(\beta c_0+\alpha c_2+c_4)\delta^4+\cdots$$

$$+(\beta c_{2n-4}+\alpha c_{2n-2}+c_{2n})\delta^{2n}$$

$$+(\beta c_{2n-2}+\alpha c_{2n})\delta^{2n+2}+\beta c_{2n}\delta^{2n+4}.$$

现在，进一步讨论适当选取 c_j 使 Qf 具有适当的代数精度，注意微分表达式

$$D^0=I,$$

$$D^1=\mu\delta-\frac{1}{6}\mu\delta^3+\frac{1}{30}\mu\delta^5-\frac{1}{140}\mu\delta^7+\cdots,$$

$$D^2=\delta^2-\frac{1}{12}\delta^4+\frac{1}{90}\delta^6-\frac{1}{560}\delta^8+\cdots,$$

$$D^3=\mu\delta^3-\frac{1}{4}\mu\delta^5+\frac{7}{120}\mu\delta^7-\cdots,$$

$$D^4=\delta^4-\frac{1}{6}\delta^6+\frac{7}{240}\delta^8-\cdots.$$

如果在 A_k 的表达式中，令 $c_0=1$，容易看出，对任何一次多项式，均有

$$s(t_i)=f(t_i),$$

为了保证结点处有较高的代数精度，c_{2j} 取法如下表：

表10 结点公式的代数精度

n \ 精度	2	3	4	5
3	$c_2=-\frac{1}{4}$			
4		$c_2=-\frac{1}{6}$		
5		$c_2=-\frac{1}{3}$	$c_4=\frac{13}{144}$	
6		$c_2=-\frac{1}{4}$		$c_4=\frac{13}{240}$

例如 $n=6$ 的情况，有

$$\begin{aligned}s(t_i)&=\psi\left(\frac{1}{4},\frac{1}{120}\right)\\&=\left[I+\left(\frac{1}{4}+c_2\right)\delta^2+\left(\frac{1}{120}+\frac{c_2}{4}+c_4\right)\delta^4\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{c_2}{120}+\frac{c_4}{4}+c_6\right)\delta^6+\cdots\right]f(t_i)\end{aligned}$$

故当 $c_2=-\frac{1}{4}$ 时代数精度为 3，当 $c_2=-\frac{1}{4}$ 且 $\frac{1}{120}+\frac{c_2}{4}+c_4=0$ 时代数精度为 5，解得 $c_4=\frac{13}{120}$.

当 $n=0$, $c_0=1$, $k=4$ 时有

$$\begin{aligned}s=Qf&=\sum_j f_{j+2}B_{j,4}(x)\\&=\sum_j f_{j+2}\Omega_3\left(\frac{x-t_{j+2}}{h}\right),\end{aligned}$$

即 Schoenberg 的三次变差减少样条逼近。

令 $n=1$, $c_2=-\frac{1}{6}$，由表得到代数精度为 3 的 Jenkins 公式(1927 年)

$$\lambda_j f=\left(I-\frac{\delta^2}{6}\right)f_{j+2}.$$

我们假定 A_n 仍由(3.18)所定义，而

$$\hat{A}_n=\begin{cases}\mu A_n, & n\text{ 是偶数时},\\ A_n, & n\text{ 是奇数时},\end{cases}$$

也可得到一类局部样条逼近公式[8]。

第 4 章

伯恩斯坦多项式和保形逼近

在一类实际问题里，要求被拟合的曲线具有某种几何特征，例如，有单调或凸的性质．在本章里我们将看到，伯恩斯坦多项式有很好的几何性质，当函数$f(x)$在$[a, b]$上是单调增(或凸)时，其相应的伯恩斯坦多项式$B_n(f, x)$在$[a, b]$上也具有单调增(或凸)的性质．正因为如此，戴维斯(Davis)曾猜测，对于个别点的逼近精度要求不高，但整体逼近性质要求要好的哪一类实际逼近问题，伯氏多项式或许会找到它的应用．近几年来，伯氏多项式果真在自由外形设计中开始找到了它的应用，出现了 Bézier 曲线等．但它有一个严重缺点，就是收敛太慢，1977 年 Passow 和 Roulier 等人将这一工作推进了一步，利用伯氏多项式构造了保单调(凸)的插值函数．他们将样条函数的思想同伯氏多项式巧妙地结合起来，做出了有意义的工作．本章将侧重介绍伯氏多项式在保形逼近问题中的应用．

§1 伯恩斯坦多项式的性质

我们先引进凸函数概念

定义 1 假定$f(x)$定义在$[a, b]$上，如果连接曲线上任意两点A、B的直线段都在曲线段$\overset{\frown}{AB}$的上(下)面，则称$f(x)$是$[a, b]$上的下凸(上凸)函数．今后我们将下凸函数简称为凸函数(Convex functions)，参见图 1.

显然，函数 $y=x^2$ 在任意 $[a, b]$ 上都是凸函数。

记 $p_1(f, x)$ 是函数 $f(x)$ 关于任意节点 x_1、x_2 的一次插值函数，于是 $f(x)$ 是凸函数等价于下式成立

$$f(x)-p_1(f, x)\leqslant 0,\quad a\leqslant x_1\leqslant x\leqslant x_2\leqslant b. \tag{1.1}$$

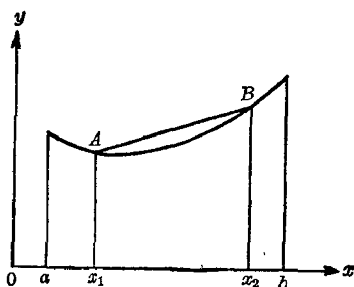


图 1

注意到 $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ 是梯形 Ax_1x_2B（图 1）的中线长度，因而，如果 $f(x)$ 是凸函数，则必有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

从而有

引理 1 假定 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数，如果

$$a\leqslant x_0<x_0+h<x_0+2h\leqslant b,$$

那末成立着

$$\Delta^2 f(x_0)=f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)\geqslant 0. \tag{1.2}$$

引理 2 假定 $f''(x)$ 在 (a, b) 上存在，那末 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上凸函数的充要条件是 $f''(x)\geqslant 0$, $a<x<b$.

证明 由插值余项表达式，对于 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 恒有

$$f(x)-p_1(f, x)=\frac{1}{2}(x-x_1)(x-x_2)f''(\xi),$$

$$x_1<\xi<x_2.$$

假定在 (a, b) 上 $f''(x)\geqslant 0$，则由于 $(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，推得 $f(x)-p_1(f, x)\leqslant 0$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，从而 $f(x)$ 是凸

函数.

下面，应用反证法完成定理必要性的证明. 假如 $f(x)$ 是凸函数、而对于 (a, b) 中某个 x 有 $f''(x)=k<0$, 由二阶导数定义恒有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=k,$$

因为 $k<0$, 故存在充分小正数 h_1, 使对于 $0<h<h_1$ 有 $x-h$, $x+h\in(a, b)$ 且 $(f'(x+h)-f'(x-h))/2h=k_1<0$, 于是

$$\int_0^{h_1}[f'(x+h)-f'(x-h)]\,dh<\int_0^{h_1}2k_1\cdot h\,dh=k_1h_1^2.$$

注意上式左端的积分等于 $f(x+h_1)-2f(x)+f(x-h_1)$，因而 $f(x+h_1)-2f(x)+f(x-h_1)<0$，而这与(1.2)矛盾. 引理证毕.

伯恩斯坦多项式与保凸逼近有着紧密的联系.

定义 2 假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，称

$$B_n(f, x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{m=0}^{n}f(a+mh)\cdot\binom{n}{m}(x-a)^m(b-x)^{n-m} \tag{1.3}$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 n 次伯恩斯坦多项式. 这里 $h=\frac{b-a}{n}$, $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

容易验明，下列关系式成立

$$B_n(f(a), x)=f(a),$$

$$B_n(f(b), x)=f(b),$$

$$B_n(1, x)\equiv\frac{1}{(b-a)^n}(x-a+b-x)^n=1,$$

$$B_n(x, x) \equiv \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{m=0}^{n} \left(a + \frac{m(b-a)}{n}\right)$$

$$\cdot \binom{n}{m} (x-a)^m (b-x)^{n-m}$$

$$\equiv a + \frac{(x-a)}{(b-a)^{n-1}}$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1-(m-1)}$$

$$\equiv a + x - a \equiv x.$$

所以，伯恩斯坦多项式具有保直的几何性质，即线性函数的伯氏多项式仍是它自己.

为了进一步研究伯氏多项式 $B_n(f, x)$ 的几何性质，先来导出 $B_n(f, x)$ 的求导公式. 为了强调差分算子的步长为 h，记 $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. 我们有

引理 3 对于 $B_n(f, x)$ 的 p 阶导数，成立着

$$B_n^{(p)}(f, x) = \frac{n!}{(n-p)!(b-a)^n} \sum_{t=0}^{n-p} \Delta_h^p f(a+th)$$

$$\cdot \binom{n-p}{t} (x-a)^t (b-x)^{n-p-t}, \qquad (1.4)$$

其中 Δ_h^p 表示步长为 h 的 p 阶向前差分算符.

证明 注意 Leibnitz 公式

$$(u(x)v(x))^{(p)} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} u^{(j)}(x) v^{(p-j)}(x),$$

由(1.3)有

$$B_n^{(p)}(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{m=0}^{n} f(a+mh) \binom{n}{m}$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} [(x-a)^m]^{(j)} [(b-x)^{n-m}]^{(p-j)}.$$

注意 $$(x^k)^{(j)}=k!x^{k-j}/(k-j)!,\quad k-j\geqslant 0;$$
$$[(b-x)^{n-m}]^{(p-j)}=(-1)^{p-j}(n-m)!\cdot(b-x)^{n-m-p+j}/(n-m-p+j)!,$$
$n-m-p+j\geqslant 0$. 便有

$$B_n^{(p)}(f,x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\cdot\frac{n!}{(n-m-p+j)!(m-j)!}\binom{p}{j}(x-a)^{m-j}\cdot(b-x)^{n-m-p+j}\times f(a+mh).$$

令 $m-j=t$, 则上式可写成

$$\begin{aligned}B_n^{(p)}(f,x)&=\frac{n!}{(b-a)^n}\sum_{t=0}^{n-p}\frac{(x-a)^t(b-x)^{n-p-t}}{t!(n-p-t)!}\cdot\sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}\times f(a+th+jh)\\&=\frac{n!}{(n-p)!(b-a)^n}\sum_{t=0}^{n-p}\Delta_h^p f(a+th)\cdot\binom{n-p}{t}(x-a)^t(b-x)^{n-p-t}.\end{aligned}$$

引理 4 我们有

$$\left.\begin{aligned}B_n^{(p)}(f,a)&=\frac{1}{(b-a)^p}\frac{n!}{(n-p)!}\Delta_h^p f(a),\\B_n^{(p)}(f,b)&=\frac{1}{(b-a)^p}\frac{n!}{(n-p)!}\nabla_h^p f(b),\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

这里 ∇_h^p 表示步长为 h 的 p 阶向后差分.

证明 由引理 3, 令 $x=a$ 便得

$$B_n^{(p)}(f,a)=\frac{n!}{(n-p)!(b-a)^n}\Delta_h^p f(a)(b-a)^{n-p},$$

类似的, 令 $x=b$ 便有

$$B_n^{(p)}(f,\ b)=\frac{n!}{(n-p)!(b-a)^n}\Delta_h^p f(a+(n-p)h)(b-a)^{n-p},$$

注意 $\Delta_h^p f(a+(n-p)h)=\Delta_h^p f(b-ph)=\nabla_h^p f(b)$，便得证.

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是单调增(或凸)函数，那么 $f(x)$ 的 n 次伯氏多项式在 $[a,\ b]$ 上也是单调增(或凸)的函数.

证明 若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是单调增函数，显然有

$$\Delta_h f(a+th)\geqslant 0,\quad t=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1,$$

由(1.4)有 $B_n'(f,\ x)\geqslant 0$，即 $B_n(f,\ x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是单调增函数. 同理，若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是凸函数，则由(1.2)知

$$\Delta_h^2 f(a+th)\geqslant 0,\quad t=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2,$$

由(1.4)有 $B_n''(f,\ x)\geqslant 0$，再据引理 2 便知 $B_n(f,\ x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的凸函数. 证毕.

定理 2 假定 p 是满足 $0\leqslant p\leqslant n$ 的某一固定整数，如果

$$m\leqslant f^{(p)}_{(x)}\leqslant M,$$

那末

$$m\leqslant c_p B_n^{(p)}(f,\ x)\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.6}$$

其中

$$c_p=\begin{cases}1,\ p=1,\\ \dfrac{n^p}{n(n-1)\cdots(n-p+1)},\ p>1.\end{cases} \tag{1.6$'$}$$

证明 由(1.4)注意到差分与导数的联系

$$\Delta_h^p f(a+th)=h^p f^{(p)}(\xi_t),\quad a+th<\xi_t<a+(t+p)h,$$

便有

$$B_n^{(p)}(f,\ x)=\frac{n!h^p}{(n-p)!(b-a)^n}\sum_{t=0}^{n-p}f^{(p)}(\xi_t)$$
$$\cdot\binom{n-p}{t}(x-a)^t(b-x)^{n-p-t}.$$

由于

$$\frac{n!h^p}{(n-p)!(b-a)^n}=n(n-1)\cdots(n-p+1)n^{-p}(b-a)^{p-n},$$

$$\sum_{t=0}^{n-p}\binom{n-p}{t}(x-a)^t(b-x)^{n-p-t}$$
$$=(x-a+b-x)^{n-p}=(b-a)^{n-p},$$

利用(1.6)′便得到定理的结论.

定理 3 假定 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的凸函数，则对于 $n=2, 3, \cdots$ 恒有

$$B_{n-1}(f, x)\geqslant B_n(f, x),\ a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.7}$$

证明 记 $t=\dfrac{x-a}{b-x}$，我们有

$$\left(\frac{b-a}{b-x}\right)^n(B_{n-1}(f, x)-B_n(f, x))$$
$$=\sum_{m=0}^{n-1}f\left(a+m\frac{b-a}{n-1}\right)\binom{n-1}{m}t^m(t+1)$$
$$-\sum_{m=0}^{n}f\left(a+m\frac{b-a}{n}\right)\binom{n}{m}t^m$$
$$=\sum_{m=1}^{n-1}f\left(a+m\frac{b-a}{n-1}\right)\binom{n-1}{m}t^m+f(a)$$
$$+\sum_{m=1}^{n-1}f\left(a+(m-1)\frac{b-a}{n-1}\right)t^m\binom{n-1}{m-1}$$
$$+f(b)t^n-\sum_{m=1}^{n-1}f\left(a+m\frac{b-a}{n}\right)\binom{n}{m}t^m$$
$$-f(a)-f(b)t^n=\sum_{m=1}^{n-1}c_mt^m,$$

其中

$$c_m=\frac{n!}{m!(n-m)!}\left[\frac{n-m}{n}f\left(a+m\frac{b-a}{n-1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{m}{n}f\left(a+(m-1)\frac{b-a}{n-1}\right)-f\left(a+m\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

对 $f(x)$ 取插值节点

$$x_1=a+m\frac{b-a}{n-1},\ x_2=a+(m-1)\frac{b-a}{n-1},$$

相应的线性插值多项式为

$$p_1(f,x)=\frac{x-\left(a+(m-1)\dfrac{b-a}{n-1}\right)}{(b-a)/(n-1)}f\left(a+m\frac{b-a}{n-1}\right)$$

$$+\frac{a+m\dfrac{b-a}{n-1}-x}{(b-a)/(n-1)}f\left(a+(m-1)\frac{b-a}{n-1}\right).$$

令 $x=a+\frac{m}{n}(b-a)$ 便有

$$p_1\left(f,a+m\frac{b-a}{n}\right)=\frac{n-m}{n}f\left(a+m\frac{b-a}{n-1}\right)$$

$$+\frac{m}{n}f\left(a+(m-1)\frac{b-a}{n-1}\right).$$

因为 $a+(m-1)\dfrac{b-a}{n-1}<a+m\dfrac{b-a}{n}<a+m\dfrac{b-a}{n-1}$,

又 $f(x)$ 是凸函数,故

$$p_1\left(f,a+m\frac{b-a}{n}\right)\geqslant f\left(a+m\frac{b-a}{n}\right),$$

因而 $c_m\geqslant 0$. 注意到 $t=\dfrac{x-a}{b-x}$ 故当 $a<x<b$ 时 $t\geqslant 0$, 因而

$$B_{n-1}(f,x)\geqslant B_n(f,x).$$

证毕.

推论 1 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的上凸函数, 则对于 $n=2,3,\cdots$ 恒有

$$B_{n-1}(f,x)\leqslant B_n(f,x),\ a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.8}$$

推论 2 如果 $f(x)$ 在每个子区间 $\left[a+(m-1)\frac{b-a}{n-1},\right.$ $\left.a+m\frac{b-a}{n-1}\right]$, $m=12,,\cdots,n-1$ 上是线性函数, 则 $B_{n-1}(f,x)$ $=B_n(f, x)$; 反之, 如果 $f\in C[a, b]$, 且 $B_{n-1}(f, x)=$ $B_n(f, x)$, 则 $f(x)$ 在上述的每个子区间上是线性函数.

证明 如果$f(x)$在子区间$\left[a+m-1\frac{b-a}{n-1}, a+m\frac{b-a}{n-1}\right]$ 上是线性函数,则由定理 3 恒有 $p_1(f, x)=f(x)$,

$$p_1\left(f, a+m\frac{b-a}{n}\right)=f\left(a+m\frac{b-a}{n}\right),$$

故 $c_m=0$, $m=1, 2, \cdots, n-1$, 从而 $B_{n-1}(f, x)=B_n(f, x)$. 反之,如果 $B_{n-1}(f, x)=B_n(f, x)$, 那末对一切 $m=1, 2, \cdots,$ $n-1$ 有 $c_m=0$. 从而 $p_1\left(f, a+m\frac{b-a}{n}\right)=f\left(a+m\frac{b-a}{n}\right)$, 进一步由 $f(x)$ 的凸性和连续性推知, $f(x)$ 在每个子区间$\left[a+(m-1)\right.$ $\left.\times\frac{b-a}{n-1}, a+m\frac{b-a}{n-1}\right]$ 上是线性函数. 推论 2 得证.

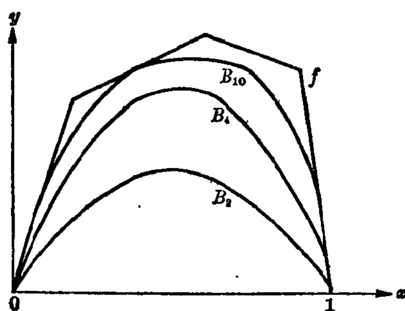


图 2

这表明, 当 $f(x)\in C[a, b]$ 时, (1.7)式保持严格的不等号(除非 $f(x)$ 在上述的每个子区间上是线性函数).

图 2 画出了一个上凸函数的伯恩斯坦多项式逼近图.

伯氏多项式的良好几何性质在曲线保形逼近中将有重要应用.

§2 保形插值的样条函数方法

定义 3 对于$[a, b]$的一个分划

$$\pi:\qquad a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,$$

在每个结点 x_i 上给定相应的型值 $y_i(i=0, 1, \cdots, N)$，如果

$$y_i\leqslant y_{i+1}\quad (y_i\geqslant y_{i+1}),\ i=0, 1, \cdots, N-1 \tag{2.1}$$

成立，则称数组 $\{y_i\}_0^N$ 具有单调增(降)性质.

如果成立着

$$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\leqslant\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i},\ i=1, 2, \cdots, N-1. \qquad (2.1)'$$

则称数组 $\{y_i\}_0^N$ 具有凸(下凸)性质，将 $(2.1)'$ 中的不等号换成"$\geqslant$"，则称 $\{y_i\}_0^N$ 具有上凸性质.

我们将构造一个插值函数 $f(x)$，它能模拟数组 $\{y_i\}_0^N$ 的单调和凸的性质，为此先给出几个定义.

定义 4 假定数值 $\{y_i\}_0^N$ 具有单调增(降)性质. 如果函数 $f(x)$满足

$$f(x_i)=y_i,\ i=0, 1, \cdots, N,$$

且函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上具有单调增(降)性质，则称函数 $f(x)$ 为数组 $\{y_i\}_0^N$ 的保单调插值函数.

定义 5 假定数组 $\{y_i\}_0^N$ 是凸的，如果函数 $f(x)$ 是在$[a, b]$上的凸函数且满足

$$f(x_i)=y_i,\ i=0, 1, \cdots, N,$$

则称函数 $f(x)$ 是数组 $\{y_i\}_0^N$ 的保凸插值函数.

定义 6 若有一组单调增(或凸)的数组 $\{y_i\}_0^N$，和一组满足 $0<\alpha_i<1$, $i=1, 2, \cdots, N$ 的数组 $\{\alpha_i\}_1^N$，记

$$\bar{x}_i=x_{i-1}+\alpha_i\Delta x_{i-1},\ \Delta x_{i-1}=x_i-x_{i-1},\ i=1, 2, \cdots, N.$$

假定有这样一组数据 $\{t_i\}_1^N$ 使得由点列

$$(x_0, y_0), (\bar{x}_1, t_1), (\bar{x}_2, t_2), \cdots, (\bar{x}_N, t_N), (x_N, y_N)$$

所联成的折线 $L(x)$ 满足

$$L(x_i)=y_i,$$

且 $L(x)$ 是单调增(或凸)的函数，便称 $(\bar{x}_i, t_i)\ t=1, 2, \cdots, N$ 是 $(x_i, y_i)\ i=0, 1, \cdots, N$ 对应于 $\{\alpha_i\}_1^N$ 的容许点列.

图 3 中的 c_i 分别表示保单调的容许点列.

通常，将保单调或保凸拟合统称为几何保形逼近. 如果已知数组 $\{y_i\}_0^N$ 是单调增(或凸)的，如何去选取保形插值函数？这里，我们假定数组的容许点列是存在的，这时存在一插值函数 $L(x)$（由容许点列联成的折线）它具有保形性质，但是它的光滑度是低的. 为了提高光滑度，我们将在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上作 $L(x)$ 的适当次伯恩斯坦多项式，并且证明这些伯氏多项式在整体上具有适当阶的光滑度. 也就是说，我们将用分片伯氏多项式来作几何保形逼近，这样，便将样条函数和伯氏多项式联系在一起了.

下面，便来叙述这一方法，假定单调(或凸)的数组 $\{y_i\}_0^N$ 存在着容许点列 $(\bar{x}_i, t_i)$，$i=1, 2, \cdots, N$，这里 $\bar{x}_i=x_{i-1}+$

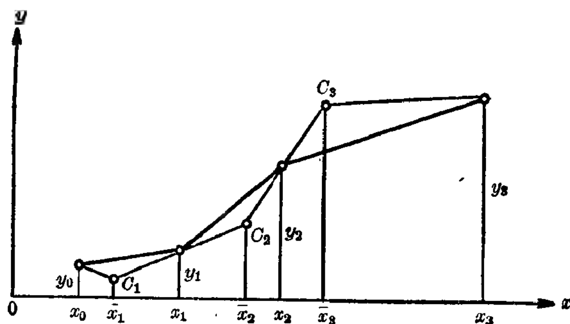


图 3

$\alpha_i \Delta x_{i-1}$, $\Delta x_{i-1}=x_i-x_{i-1}$, $0<\alpha_i<1$. 依定义，由点列

$$(x_0,\ y_0),\ (\bar{x}_1,\ t_1),\ \cdots(\bar{x}_N,\ t_N),\ (x_N,\ y_N)$$

联成的折线 $L(x)$ 具有保单调(或凸)的性质，且满足

$$L(x_i)=y_i,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ N.$$

函数 $L(x)$ 在 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上由 $(x_{i-1},\ y_{i-1})$, $(\bar{x}_i,\ t_i)$, $(x_i,\ y_i)$ 三点联成的折线组成，将它记成 $L_i(x)$. 下面，我们假定 α_i 可写成两个正整数 m_i、n_i 之比，即

$$\alpha_i=m_i/n_i=(km_i)/(kn_i), \tag{2.2}$$

这里 $m_i<n_i$, k 为任意正整数.

在区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上作 $L_i(x)$ 的 kn_i 次伯氏多项式

$$q_i(x)=\frac{1}{(\Delta x_{i-1})^{kn_i}}\sum_{\nu=0}^{kn_i}L_i\left(x_{i-1}+\frac{\nu}{kn_i}\Delta x_{i-1}\right)\cdot\binom{kn_i}{\nu}(x-x_{i-1})^{\nu}(x_i-x)^{kn_i-\nu}, \tag{2.3}$$

其中 $x\in[x_{i-1},\ x_i]$, 由引理 4, $q_i(x)$ 满足插值条件且其各阶导数有表达式

$$\left.\begin{aligned}&q_i(x_{i-1})=L_i(x_{i-1})=y_{i-1},\ q_i(x_i)=L_i(x_i)=y_i;\\&q_i^{(j)}(x_{i-1})=\frac{1}{(\Delta x_{i-1})^j}\frac{(kn_i)!}{(kn_i-j)!}\Delta_{h_i}^jL_i(x_{i-1});\\&q_i^{(j)}(x_i)=\frac{1}{(\Delta x_{i-1})^j}\frac{(kn_i)!}{(kn_i-j)!}\nabla_{h_i}^jL_i(x_i);\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中 $h_i=\dfrac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}$, $1\leqslant j\leqslant kn_i$. 从而有

$$\begin{aligned}q_i'(x_{i-1})&=\frac{kn_i}{\Delta x_{i-1}}\Delta_{h_i}L_i(x_{i-1})\\&=\frac{kn_i}{\Delta x_{i-1}}\left(L_i\left(x_{i-1}+\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}\right)-L_i(x_{i-1})\right),\end{aligned}$$

注意到

$$x_{i-1}<x_{i-1}+\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}<x_{i-1}+\frac{km_i}{kn_i}\Delta x_{i-1}=\bar{x}_i,$$

故点 $x_{i-1}+\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}$ 在区间$(x_{i-1},\ \bar{x}_i)$中。但 $L_i(x)$在$(x_{i-1},\ \bar{x}_i)$上是线性函数，于是

$$L_i\left(x_{i-1}+\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}\right)=L_i(x_{i-1})+\frac{t_i-y_{i-1}}{\bar{x}_i-x_{i-1}}\cdot\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i},$$

从而导得

$$q_i'(x_{i-1})=\frac{t_i-y_{i-1}}{\bar{x}_i-x_{i-1}}. \tag{2.5}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}q_i'(x_i)&=\frac{kn_i}{\Delta x_{i-1}}\nabla_{h_i}L_i(x_i)\\&=\frac{kn_i}{\Delta x_{i-1}}\left(L_i(x_i)-L_i\left(x_i-\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}\right)\right),\end{aligned}$$

注意到

$$x_i>x_i-\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}=x_{i-1}+\frac{kn_i-1}{kn_i}\Delta x_{i-1}>x_{i-1}+\frac{km_i}{kn_i}\Delta x_{i-1},$$

故点 $x_i-\frac{\Delta x_{i-1}}{kn_i}$ 在区间$(\bar{x}_i,\ x_i)$中，但 $L_i(x)$在$(\bar{x}_i,\ x_i)$上是线性函数，因而，类似于(2.5)有

$$q_i'(x_i)=\frac{y_i-t_i}{x_i-\bar{x}_i}. \tag{2.5$'$}$$

现在以 x_{i-1} 为出发点对函数 $L(x)$ 作步长 h_i 的 km_i 阶向前差分，它由点列

$$x_{i-1},\ x_{i-1}+h_i,\ \cdots,\ x_{i-1}+km_ih_i$$

相应的函数值

$$L(x_{i-1}),\ L(x_{i-1}+h_i),\ \cdots,\ L(x_{i-1}+km_ih_i)$$

组成。注意到 $x_{i-1}+km_ih_i=x_{i-1}+\frac{m_i}{n_i}\Delta x_{i-1}=\bar{x}_i$，而 $L(x)$在$[x_{i-1},\ \bar{x}_i]$上是线性函数 $L_i(x)$，故

$$\Delta_{h_i}^{km_i}L(x_{i-1})=0,$$

从而由(2.4)有

$$q_i^{(j)}(x_{i-1})=0,\quad j=2,\ 3,\ \cdots,\ m_ik. \tag{2.6}$$

同理，以 x_i 为出发点，对 $L(x)$ 作步长 h_i 的 $(n_i-m_i)k$ 阶向后差分，注意到终末端的差分节点为 $x_i-k(n_i-m_i)h_i=x_{i-1}+\alpha_i\Delta x_{i-1}=\bar{x}_i$，故

$$q_i^{(j)}(x_i)=0,\quad j=2,\ 3,\ \cdots,\ (n_i-m_i)k. \tag{2.6$'$}$$

此外，作 $L(x)$ 在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 的 kn_{i+1} 次伯氏多项式，由(2.4)和(2.5)有

$$q_{i+1}(x_i)=y_i=q_i(x_i),\quad q'_{i+1}(x_i)=\frac{t_{i+1}-y_i}{\bar{x}_{i+1}-x_i}.$$

注意到$(\bar{x}_i,\ t_i)$, $(x_i,\ y_i)$, $(\bar{x}_{i+1},\ t_{i+1})$三点共线，便有

$$q'_{i+1}(x_i)=\frac{t_{i+1}-y_i}{\bar{x}_{i+1}-x_i}=\frac{y_i-t_i}{x_i-\bar{x}_i}=q'_i(x_i).$$

于是成立着

$$q_{i+1}(x_i)=q_i(x_i),\ q'_{i+1}(x_i)=q'_i(x_i). \tag{2.7}$$

记 $q(x)$是定义在$[a,\ b]$上的函数，它在$[x_{i-1},\ x_i]$上的表达式为 $q_i(x)$，即(2.3)，则由(2.6)(2.7)可知

(1) $q(x)$在$[x_{i-1},\ x_i]$上是次数不超过kn 次的多项式，其中 $n=\max\limits_{1\leq i\leq N} n_i$，$k$ 是任意正整数；

(2) $q(x)$在节点 x_i 处有直到 mk 为止的连续导数，其中 $m=\min\limits_{1\leq i\leq N}\min(m_i,\ n_i-m_i)$.

引进符号 $s_q^p(\pi)$，它表示 π 的分点 $\{x_i\}_0^N$ 为结点，有 p 阶连续导数的 q 次多项式样条函数的空间(这里假定$p<q$).

由上面定义的函数 $q(x)$，它在$[x_{i-1},\ x_i]$上的表达式为 $q_i(x)$(它是 $L_i(x)$的 kn_i 伯氏多项式)即

$$q_i(x)=\frac{1}{(\Delta x_{i-1})^{kn_i}}\sum_{\nu=0}^{kn_i}L_i\left(x_{i-1}+\frac{\nu}{kn_i}\Delta x_{i-1}\right)$$
$$\cdot(x-x_{i-1})^{\nu}(x_i-x)^{kn_i-\nu}. \tag{2.8}$$

不难看出，$q(x)\in s_{kn}^{km}(\pi)$. 且 $q(x)$ 是关于数组 $\{y_i\}_0^N$ 的保单调(或凸)插值函数. 这里

$$\left.\begin{aligned}n&=\max_{1<i<N} n_i,\\ m&=\min_{1<i<N}\min(m_i,\ n_i-m_i).\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

§3 容许点列的构造

在§2, 我们假定数组 $\{y_i\}_0^N$ 的容许点列是存在的，于是，可利用分片伯氏多项式构造保形插值.

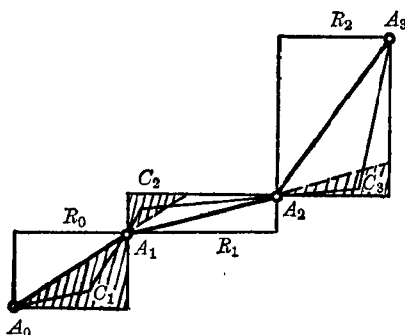


图 4.1

定义 7 如果数组 $\{y_i\}_0^N$ 的容许点列是存在的，则称数组 $\{y_i\}_0^N$ 是正则的.

3-1 单调数组的容许点列构造

先假定数组 $\{y_i\}_0^N$ 是严格单调的，即对于任意 j 有 $y_{j+1}>y_j$, $j=0, 1, \cdots, N-1$. 将 $A_i(x_i, y_i)$ 联成折线，过每一点 $A_i(x_i, y_i)$ 作平行于 x 轴 y 轴直线. 这样，在 $A_{i-1}A_i$ 上构成一个辅助矩形 R_{i-1}, 它以 $A_{i-1}A_i$ 为对角线，矩形 R_{i-1} 的边分别平行于 x 轴 y 轴(图 4).

作 A_0A_1 的延长线，它将 R_1 分成两部分；同样的 A_1A_2 的延长线也将 R_2 分成两部分.

在 A_0A_1 两侧选取一个三角形，例如在 A_0A_1 的下侧，那末，在 R_1 中 A_0A_1 延长线所截的矩形上方部分，便是容许点所在区域；同理，在 A_1A_2 延长线截 R_2 的下方区域便是容许点所在区域(图 4.1、图 4.2 斜线部分便是容许点所在区域)。

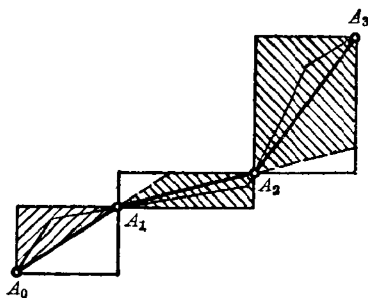


图 4.2

寻找容许点时，只要在 R_0 的斜线部分寻找一点 C_1，再作 C_1A_1 延长线交 R_1 斜线部分为一直线段；在这直线段上任取一点 C_2，取 C_2A_2 延长线交 R_2 为一直线段，在这直线段上任取一点 C_3，那末 C_1、C_2、C_3 便是一组容许点列.

由于容许点列存在斜线区域中，我们可不断调整 C_i 的位置，使拟合曲线达到问题的要求，换句话说，可通过人机对话，调整曲线的位置。因而，对于严格单调的数组，容许点列是存在的.

如果存在某个 j，使得 $y_j=y_{j+1}$，即 A_jA_{j+1} 平行于 x 轴，那末容许点列就不一定存在(图 5)。

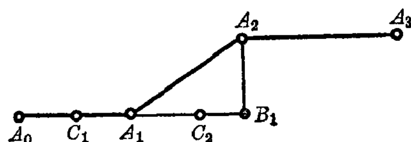


图 5 (非正则数组)

图 5 中，A_0A_1 的容许点 C_1 必在线段 A_0A_1 上，而 A_1A_2 的容许点 C_2 必在 A_1B_1 上，但 A_2A_3(除掉端点)上任一点与 C_2 的联线均不通过 A_2，因而数组的容许点列不存在。

进一步分析，便可得到如下结论：

如果存在某个 j、m 使得 $\Delta y_i>0(i=j+1,\ \cdots,\ j+m-2)$

而

$$\Delta y_j=0,\ \Delta y_{j+m-1}=0. \tag{3.1}$$

那末，当 m 是偶数时，数组 $\{y_i\}_0^N$ 是正则的.

如果(3.1)成立，但 m 是奇数，情况就比较复杂，假定找到某个 $k(j+2\leqslant k\leqslant j+m)$ 使得

$$(-1)^{k-j}\Delta s_{k-j}>0,\quad s_k=\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}},$$

$$(\text{线段 } \overline{A_{k-1}A_k} \text{ 的斜率}) \tag{3.2}$$

那末数组 $\{y_i\}_0^N$ 是正则的.

3-2 凸数组的容许点列构造

假定数组 $\{y_i\}_0^N$ 是凸的. 记

$$s_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},$$

即 s_i 为线段 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的斜率，有 $s_i\leqslant s_{i+1}$. 我们在线段 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 上构造三角形 $A_{i-1}B_iA_i$(图 9)：作 $\overline{A_{i-2}A_{i-1}}$ 和 $\overline{A_{i+1}A_i}$ 的延长线交于 B_i，这样，便在 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的一侧得到辅助三角形 $A_{i-1}B_iA_i$. 在特殊的情况下，三角形 $A_{i-1}B_iA_i$ 退化成直线段 $\overline{A_{i-1}A_i}$. 对于最右端线段 $\overline{A_{N-1}A_N}$，则作 $\overline{A_{N-2}A_{N-1}}$ 的延长线与过 A_N 且与 x 轴垂直的直线相交于 B_N，构成三角形

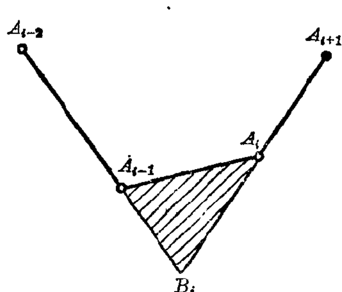


图 6

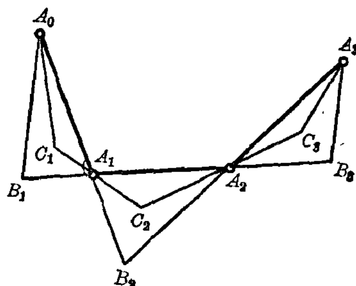


图 7.1

$A_{N-1}B_NA_N$；对于最左端线段 $\overline{A_0A_1}$，则作 $\overline{A_1A_2}$ 延长线与过 A_0 且与 x 轴垂直的直线交于 B_1，从而形成三角形 $A_0B_1A_1$。



图 7.2

假定三角形 $A_{i-1}B_iA_i$ 是非退化的，设三角形 $A_{i-1}B_iA_i$ 三边 B_iA_{i-1}、$A_{i-1}A_i$、A_iB_i 的斜率分别为 s_{i-1}、s_i、s_{i+1}。在三角形 $A_{i-1}B_iA_i$ 任取一点 C_i，可以验明：线段 $\overline{C_iA_i}$ 的斜率 s_i 大于或等于线段 $\overline{C_iA_{i-1}}$ 的斜率。

利用这一原理，我们可求得容许点列的区域，它存在于辅助三角形 $A_{i-1}B_iA_i$ 中。

图 7.1 和图 7.2 作出了容许点列，在图 7.3 中容许点列不存在。从而，对于凸数组 $\{y_i\}_0^N$，若存在某个 i 满足

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^2 y_{i-1}=\Delta^2 y_{i+1}=0,\\&\Delta^2 y_i\neq 0,\ 1\leqslant i\leqslant N-3.\end{aligned}\right\}\qquad(3.3)$$

则容许点列不存在，反之，如果(3.3)不成立，则容许点列一定存在。

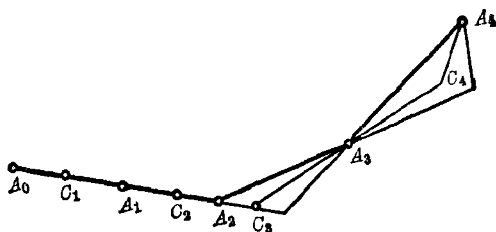


图 7 3

3-3 数值例子

例 1 给定一组数据 $A_i(x_i, y_i)$：(5, 15), (10, 10), (15, 10), (20, 10), (25, 12), (30, 19), (35, 33)。容易验明 $\{y_i\}_0^6$

是凸的，记 $\bar{x}_i = x_{i-1} + \alpha_i(x_i - x_{i-1})$，取 $\alpha_i = \dfrac{1}{2}, i=1, 2, \cdots, 6,$ 可以验明容许点列 C_i 可取为(7.5, 10), (12.5, 10), (7.5, 10), (22.5, 10), (27.5, 14), (32.5, 23.5).

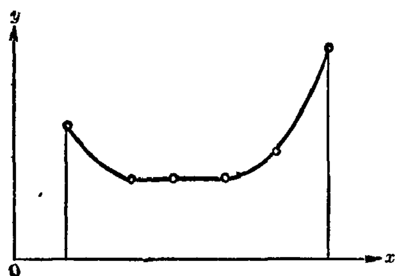


图 8

进一步利用伯氏多项式构造 $s_2^1(\pi)$ 的保形插值样条 $f(x)$（图 8）

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{25}(5x^2 - 100x + 750), & 5 \leqslant x \leqslant 10; \\ 10, & 10 \leqslant x \leqslant 15; \\ 10, & 15 \leqslant x \leqslant 20; \\ \dfrac{1}{25}(2x^2 - 80x + 1050), & 20 \leqslant x \leqslant 25; \\ \dfrac{1}{25}(3x^2 - 130x + 1675), & 25 \leqslant x \leqslant 30; \\ \dfrac{1}{25}(4x^2 - 190x + 2575), & 30 \leqslant x \leqslant 35. \end{cases}$$

§4 分片单调保形插值

在一类实用问题中，曲线 $y=f(x)$ 并不在 $[a, b]$ 上单调．但在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上它是单调的，这就要求我们去构造一条保形曲线，它在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上与 $f(x)$ 有相同的单调性，文献中称为 PMI 问题．给定 $[a, b]$ 的一个分划

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

假定 $f(x)$ 在每个 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是单调的，记 $f(x_i) = y_i$，要求寻

找一个在$[a, b]$上有适当光滑度的函数$q(x)$满足

$$\left.\begin{array}{l} q(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,N, \\ q(x)\text{在}[x_{i-1}, x_i]\text{上与}f(x)\text{有同样单调性} \\ \qquad i=1,2,\cdots,N. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

现在介绍两个解决办法.

方法1 对$[a, b]$作扩充分划

$$\pi':\quad a=x_0<\bar{x}_1<x_1<\cdots<x_{N-1}<\bar{x}_N<x_N=b,$$

这里$\bar{x}_i=\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}$, $i=1, 2, \cdots, N$. 不妨假定$y_{i-1}\leqslant y_i$. 我们来建立$[x_{i-1}, x_i]$上的保形插值函数,它满足$q(x_{i-1})=y_{i-1}$, $q(x_i)=y_i$, $q(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$是单调上升的.

作辅助点列

$$(x_{i-1}, y_{i-1}),\ \left(\frac{x_{i-1}+\bar{x}_i}{2}, y_{i-1}\right),\ (\bar{x}_i, \bar{y}_i),$$

$$\left(\frac{x_i+\bar{x}_i}{2}, y_i\right),\ (x_i, y_i), \tag{4.2}$$

这里$\bar{y}_i=\dfrac{y_{i-1}+y_i}{2}$. 将这些点联成折线, 记之为$L_i(x)$, 显然在$[x_{i-1}, x_i]$上函数$L_i(x)$是递增的, 但是$L_i(x)$的光滑度差. 不难看出,点列

$$\left(\frac{x_{i-1}+\bar{x}_i}{2}, y_{i-1}\right)、\left(\frac{x_i+\bar{x}_i}{2}, y_i\right)$$

是(x_{i-1}, y_{i-1})、$(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$、(x_i, y_i)对应于$\alpha=\dfrac{1}{2}$的容许点列.

由于$\alpha=\dfrac{m_i}{n_i}=\dfrac{1}{2}$, 取$n_i=2n$, $m_i=n$(n为任意正整数).

在$[x_{i-1}, \bar{x}_i]$、$[\bar{x}_i, x_i]$上分别作函数$L_i(x)$的$2n$次伯氏多项式(参见(2.3))$q_i(x)$有

$$
q_i(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{2n}}{(\Delta x_{i-1})^{2n}}\sum\limits_{\nu=0}^{2n}L_i\left(x_{i-1}+\dfrac{\nu}{4n}\Delta x_{i-1}\right)\dbinom{2n}{\nu}\\ \quad\cdot(x-x_{i-1})^{\nu}(\bar{x}_i-x)^{2n-\nu}, \quad x\in(x_{i-1},\ \bar{x}_i),\\ \dfrac{2^{2n}}{(\Delta x_{i-1})^{2n}}\sum\limits_{\nu=0}^{2n}L_i\left(\bar{x}_i+\dfrac{\nu}{4n}\Delta x_{i-1}\right)\dbinom{2n}{\nu}\\ \quad\cdot(x-\bar{x}_i)^{\nu}(x_i-x)^{2n-\nu}, \quad x\in(\bar{x}_i,\ x_i).\end{cases} \tag{4.3}
$$

注意到(2.5)、(2.5)′和(4.2)有 $q_i'(x_{i-1}+)=q_i'(x_i-)=0$, 再综合(2.6)、(2.6)′得

$$
\left.\begin{aligned}&q_i(x_{i-1})=y_{i-1},\ q_i(x_i)=y_i,\\&q_i^{(j)}(x_{i-1}+)=q_i^{(j)}(x_i-)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\\&q_i'(x)\geqslant 0,\ x\in(x_{i-1},\ x_i).\end{aligned}\right\} \tag{4.4}
$$

由于 $q_i^{(j)}(x_{i-1}+)=q_i^{(j)}(x_i-)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 所以在 $[a, b]$ 上函数 $q_i(x)$ 是有 n 阶连续导数的分片 $2n$ 次多项式, 且在每个子区间上与 $f(x)$ 的单调性相同.

方法 2 在 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上作 $2n+1$ 次 Hermite 型插值

$$
\left.\begin{aligned}&q_i(x_{i-1})=y_{i-1},\ q_i(x_i)=y_i,\\&q_i^{(j)}(x_{i-1})=q_i^{(j)}(x_i)=0,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.\end{aligned}\right\} \tag{4.5}
$$

容易看出 $q_i'(x)$ 在 x_{i-1}、x_i 处分别有 n 重根, 而 $q_i'(x)$ 是不超过 $2n$ 次的多项式, 因而 $q_i'(x)$ 在 $(x_{i-1},\ x_i)$ 内无根, 即 $q_i'(x)$ 在 $(x_{i-1},\ x_i)$ 上保号. 如果 $y_{i-1}\leqslant y_i$, 则 $q_i(x)$ 单调上升; 如果 $y_{i-1}\geqslant y_i$ 则 $q_i(x)$ 单调下降. 而在 $[a,\ b]$ 上, $q_i(x)$ 是有 n 阶连续导数的分片 $2n+1$ 次多项式.

如果在端点 x_i 处减少 $q_i^{(n)}(x_i)=0$ 的条件, 那末, $q_i(x)$ 便成为具有 $n-1$ 次连续导数的 $2n$ 次分片多项式.

上述的 Hermite 插值函数可由重节点 Newton 差商公式给出.

第 5 章

实验数据的曲面拟合法

§1 方法的概述

二元函数的逼近在许多领域有着重要应用. 我们面临的大量问题是从一组离散数据去构作曲面, 例如, 地质结构中趋势面的分析、心电图的模拟等等. 所构造的曲面应具有逼近和几何的特征, 这里侧重于前者, 而将数值方法的描述放在首位.

(i) **数据分布是否规则?** 对分布在矩形格点上的数据, 应用乘积型方法去逼近. 若数据分布是散乱的, 常用的方法有样条函数的最小二乘法, Shepard 方法, 二步逼近法等.

(ii) **数值方法的选择还将依赖于原始数据的准确度.** 在大量实际问题中, 实测数据仅有三至四位准确. 一般讲, 在这种情况下, 局部逼近优于全局逼近. 而磨光法(双二、三次样条曲面)是一个简便方法.

(iii) **全局逼近、局部逼近和二步法逼近的选择.** 局部逼近即"分片法", 也就是将大范围的拟合问题分割为许多互不相交的小片上的拟合. 方法的优点是计算简单, 容易保持几何特性, 其缺点是在联接处甚至可能不连续. 在散乱数据的拟合中, 可针对每一点来建立一个拟合曲面, 这也是一种局部逼近问题. 二步逼近法常常用于非规则数据中, 作为第一步, 是将数据规则化, 即将矩形的格子点的函数值补齐, 局部逼近是这一步常用的方法. 第二步, 利用乘积型方法将曲面构作

出来.

(iv) **基函数的选择是一个极重要但又不容易解决的问题.** 目前有下列几种不同的考虑.

乘积型的基函数 $\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\}$. 例如可选择为 $\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ 或乘积型 B 样条函数 $\{B_{i,k}(x)B_{j,k}(y)\}$; 或者是 y 方向选为 $1, y, y^2$ 为基, x 方向用 B 样条函数为基的混合乘积型, 即将曲面模型选为

$$z=F(x, y)=\sum_{m=0}^{2}\sum_{l=1}^{n}c_{lm}B_{l,4}(x)y^m. \tag{1.1}$$

当我们考虑散乱数据逼近的时候, 距离是一个重要因素, 也即是说远离 (x_i, y_i) 的那些点的函数值对 $f(x_i, y_i)$ 的影响是微小的. 因而, 基函数中常考虑含有

$$\frac{1}{r_i(x, y)}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

的因子. 例如

$$z=F(x, y)=\sum_{i=1}^{N}a_i r_i^2(x, y)\log r_i(x, y)+b_1x+b_2y+b_3, \tag{1.2}$$

Duchon, J. 称它为箔板样条, 它属于 C 函数类. 又例如, 取曲面方程为

$$z=F(x, y)=\sum_{i=1}^{N}a_i r_i^3(x, y)+b_1x+b_2y+b_3, \tag{1.3}$$

文献中称之为准三次样条, 它属于 C^1 函数类.

再则, 基函数可由光滑泛函的极小解产生. 假定 X 是定义在 $\mathscr{D}$ 上具有一定光滑度的函数集合. 记 U 是 X 中满足插值条件的函数集合, 即

$$U=\{u\in X\,|\,u(x_i, y_i)=z_i,\ i=1, 2, \cdots, N\},$$

又设 θ 是定义在 X 上的泛函, 它度量着 X 中元素的光滑性,

即 $\theta(f)$ 越小，f 便越光滑．于是，可考虑下面的极小问题，即在 U 中求 F 使

$$\theta(F)=\inf_{u\in U}\theta(u). \tag{1.4}$$

类似于一元样条函数的变分性质，称 F 为关于 $\{z_i\}_1^N$ 的样条插值函数．Laurent, P. J. 曾在《优化与逼近》一书中讨论了这一问题．这里，举出几个例子来说明它在曲面构造中的应用．

假定 X 是半模 $\|\cdot\|$ 的希氏空间，$\theta(f)=\|f\|$，而

$$N=\{f\in X\mid \|f\|=0\}, \tag{1.5}$$

Duchon 证明了，对 X 加上一个不太强的条件，(1.4)的解（允许加上 N 中任一元素）是唯一的．此外，还可以证明，存在着一个再生核 K，它定义在 $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$ 上，使得(1.4)的解可表成

$$F(x,\ y)=\sum_{i=1}^{N}a_i K(x,\ y;\ x_i,\ y_i)+\sum_{i=1}^{d}b_i\,p_i(x,\ y), \tag{1.6}$$

这里 $\{p_i\}_1^N$ 是 N 的基底，也即是说，我们寻找到拟合曲面的一组基 $K(x,\ y;\ x_i,\ y_i)$ 及 $p_i(x,\ y)$，它由光滑泛函的极小解所产生，而且系数 a_i、b_i 由方程组

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}K(x_j,\ y_j;\ x_i,\ y_i)a_i+\sum_{i=1}^{d}b_i\,p_i(x_j,\ y_j)=z_j,\\&\qquad\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\\&\sum_{i=1}^{N}a_i\,p_k(x_i,\ y_i)=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ d\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

所决定．这里，一个困难的问题是再生核的构造．如果 $\mathscr{D}$ 是矩形域，取泛函

$$\theta(u)=\iint_{\mathscr{D}}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy,$$

X 取适当空间，那末 $\theta(u)=\min$ 的解便是箔板样条或准三次

样条.

如果再记 $E(F)$ 是关于 F 的逼近泛函, 例如

$$E(F)=\sum_{i=1}^{N}(F(x_i,\ y_i)-z_i)^2,$$

那末在 X 中寻找 u 使

$$\rho(u)=p\theta(u)+(1-p)E(u)=\min,$$

便得到希氏空间的光顺样条.

(v) **基函数个数的决定也是一个实际问题.** 如果 $f(x)$ 是定义在 $[0,\ 1]$ 上的 k 次可微函数, 且 $\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant L$, 记 $g(x)$ 是它的 Lagrange 代数插值多项式, 那末为了 $g(x)$ 达到 ε 的精度, 需要插值数据 N 的数目 $\approx\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}$. 我们希望这个结果推广到多变量情况. 首先, 考虑到 Lagrange 乘积型代数插值. 如果要求在 x 和 y 方向的逼近误差限为 $\frac{\varepsilon}{2}$, 且假定 f 关于 k 的各阶导数的界为 L, 那末需要的数据 $N\approx\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{k}}$. ε 熵理论已应用到多元函数逼近理论中来(文献[11]). 假定 f 有 n 个自变量, 每个变量在 $[0,\ 1]$ 区间取值, 又关于 f 的 k 阶混合导数的界为 L, ε 是逼近准确度, 那末基函数数目 N_ε 可取成

$$\log_2(N_\varepsilon)\approx\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{k}}.$$

Lorente 于 1966 年指出了一个结果: 如果 $f(x,\ y)$ 在 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 上连续, 那末存在着两组连续函数 $\varphi_i(x)$ 和 $\psi_i(x)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 使得 $f(x,\ y)$ 可表成

$$f(x,\ y)=\sum_{i=1}^{5}\theta_i(\varphi_i(x)+\psi_i(y)),$$

这里 $\theta_i(\cdot)$ 是依赖于 $f(x,\ y)$ 的单变量连续函数.

§2 乘积型方法

假定 $f(x, y) \in C[a, b] \times [c, d]$, $X_N = \mathrm{Span}\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\}$, $Y_M = \mathrm{Span}\{\psi_1(y), \cdots, \psi_M(y)\}$. 这里 $\varphi_i(x)$ 和 $\psi_i(y)$ 是分别定义在 $C[a, b]$ 和 $C[c, d]$ 上的函数. 且 $\{\varphi_i(x)\}_1^n$、$\{\psi_j(y)\}_1^n$ 是 $C[a, b]$、$C[c, d]$ 上的两组线性无关函数. 也即是说 X_N、Y_M 分别是 $C[a, b]$、$C[c, d]$ 中的 N、M 维线性子空间. 假设 L_x, M_y 是定义在 $C[a, b] \times [c, d]$ 上的线性算子:

$$\left.\begin{aligned} L_x f(x, y) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(y)\varphi_i(x), \quad \alpha_i(y) \in C[c, d], \\ M_y f(x, y) &= \sum_{i=1}^{M} \beta_i(x)\psi_i(y), \quad \beta_i(x) \in C[a, b]. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

便有

$$\begin{aligned} M_y L_x f(x, y) &= \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) M_y \alpha_i(y) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) \sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} \psi_j(y) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y), \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 α_{ij} 是待定常数, (2.2)称为二元函数 $f(x, y)$ 在 $\mathscr{D} = [a, b] \times [c, d]$ 上的乘积型逼近. α_{ij} 称为乘积型逼近参数. $\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\}_{i=1,\ j=1}^{N,\ M}$ 称为乘积型基函数.

2-1 乘积型插值

如果在 $[a, b] \times [c, d]$ 上给出一组矩形插值点

$$(x_s, y_t), \quad s = 1, 2, \cdots, N; \ t = 1, 2, \cdots, M.$$

由插值条件, α_{ij} 满足

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} \varphi_i(x_s) \psi_j(y_t) = f(x_s, y_t), \tag{2.3}$$

$$s=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ M.$$

如果插值问题的解存在且唯一，称

$$z=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\alpha_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) \tag{2.4}$$

为 $z=f(x,\ y)$ 的插值曲面.

若选取的基函数 $\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\}$ 满足

$$\varphi_i(x_s)=\delta_{is}=\begin{cases}1, & i=s,\\ 0, & i\neq s,\end{cases}$$

$$\psi_j(y_t)=\delta_{jt}=\begin{cases}1, & j=t,\\ 0, & j\neq t,\end{cases}$$

则插值曲面(2.4)可表成

$$z=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}f(x_i,\ y_j)\varphi_i(x)\psi_j(y). \tag{2.4$'$}$$

(2.4)′ 称为插值曲面的 Lagrange 形式.

一般地讲，(2.3)要解 $N\cdot M$ 阶的代数方程组，工作量是浩大的. 若利用乘积型基函数的特点，便能使矩阵的阶数降低，从而达到减少计算量的目的. 不妨设 $M>N$. 第一步，任意固定 y_t 由(2.4)有

$$z=F(x,\ y_t)=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M}\alpha_{ij}\psi_j(y_t)\right)\varphi_i(x)=\sum_{i=1}^{N}\beta_{it}\varphi_i(x). \tag{2.5}$$

上式中，令 $x=x_s(s=1, 2, \cdots, N)$，求得 β_{it}，进而得到 $F(x, y_t)$ 的表达式. 这个过程要求解 M 个 N 阶的线性代数方程组，即对 $t=1,\ 2,\ \cdots,\ M$ 求解

$$\sum_{i=1}^{N}\beta_{it}\varphi_i(x_s)=f(x_s,\ y_t),\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{2.6}$$

作为第二步，考虑下面插值问题

$$\sum_{j=1}^{M} r_j(x)\psi_j(y_t)=F(x, y_t),\ t=1, 2, \cdots, M. \quad (2.7)$$

通过求解上面的方程组，将 $\{r_j(x)\}_1^M$ 确定下来. 容易验证

$$z=\sum_{j=1}^{M} r_j(x)\psi_j(y), \quad (2.8)$$

便是满足 (2.3) 的插值曲面. 我们将这一算法用矩阵记号加以说明，记

$$\Phi=\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_N(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_N(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_N) & \varphi_2(x_N) & \cdots & \varphi_N(x_N) \end{pmatrix},$$

$$\Psi=\begin{pmatrix} \psi_1(y_1) & \psi_2(y_1) & \cdots & \psi_M(y_1) \\ \psi_1(y_2) & \psi_2(y_2) & \cdots & \psi_M(y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1(y_M) & \psi_2(y_M) & \cdots & \psi_M(y_M) \end{pmatrix},$$

$$l_t=(f(x_1, y_t), f(x_2, y_t), \cdots, f(x_N, y_t))^T,$$

$$g_s=(f(x_s, y_1), f(x_s, y_2), \cdots, f(x_s, y_M))^T,$$

$$p_x=(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_N(x))^T,$$

$$q_y=(\psi_1(y), \psi_2(y), \cdots, \psi_M(y))^T,$$

$$\beta_t=(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \cdots, \beta_{Nt})^T,$$

$$\alpha_s=(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sM})^T,$$

$$e_y=(e_1(y), e_2(y), \cdots, e_N(y))^T,$$

$$r_x=(r_1(x), r_2(x), \cdots, r_M(x))^T,$$

则(2.6)可写成 $\Phi\beta_t=l_t$, 而(2.7)则写成

$$r_x=(r_1(x), r_2(x), \cdots, r_M(x))^T$$
$$=\psi^{-1}((\Phi^{-1}l_1, p_x), (\Phi^{-1}l_2, p_x), \cdots, (\Phi^{-1}l_M, p_x))^T,$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示 N 维欧氏空间的内积运算，进一步将插值曲面(2 8)写成

$$z=((\Phi^{-1}l_1,\ p_x),\ \cdots,\ (\Phi^{-1}l_M,\ p_x))(\psi^{-1})^T g_y. \quad (2.8)'$$

我们看到，按(2.3)去建立曲面，要解一个 $N\cdot M$ 阶矩阵的求逆．而按(2.8)′去建立同样的插值曲面，则只要求一个 N 阶矩阵和一个 M 阶矩阵的逆，再增加某些内积的运算．也即是说，在乘积型插值情况下，我们将 $N\cdot M$ 阶矩阵的计算问题转化为二个低阶矩阵的计算问题．还注意到，在(2.8)′中，要对 N 阶矩阵进行多次运算，在 N 的阶不太大的情况下，计算量是不大的．例如，在 x 方向，我们取 $1,\ x,\ x^2$ 为插值基，即 $N=3$，而在 y 方向则取 B 样条函数 $\{B_{1,k}(x),\ \cdots,\ B_{M,k}(x)\}$ 为基，这里 $M\gg 3$．插值过程中，计算量是不太大的．由此得到启发，当 y 方向的基函数个数超过 x 方向基函数的个数，即 $M<N$ 时，为了得到插值曲面，第一步应对 y 先插值，第二步才对 x 方向插值，相应的插值曲面表成

$$z=((\psi^{-1}g_1,\ q_y),\ \cdots,\ (\psi^{-1}g_s,\ q_y))(\Phi^{-1})^T p_x. \quad (2.8)''$$

上式中，$(\cdot,\cdot)$表示 M 维欧氏空间的内积运算．无疑(2.8)′或(2.8)″都达到了节省内存单元的目的．

2-2 乘积型最小二乘法

设曲面 $y=f(x,\ y)$在矩形网格点$(x_s,\ y_t)\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 的型值已给．选定一组乘积型基函数 $\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\}_{i=1,j=1}^{N,\ M}$，并假定 $n\gg N,\ m\gg M$．再给定 $f(x_s,\ y_t)$ 的权系数 $\mu_s\nu_t,\ \mu_s>0,\ \nu_t>0$，用最小二乘法寻求二元曲面

$$z=F(x,\ y)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\alpha_{kl}\varphi_k(x)\psi_l(y)$$

的逼近参数 $\{\alpha_{ij}\}_{i=1,j=1}^{N,\ M}$，它使 $f(x,\ y)$，$F(x,\ y)$ 在网格点上的值的差的平方和，在权 $\{\mu_s\nu_t\}_{s=1,t=1}^{N,\ M}$ 的意义下达到最小，即

$$
\begin{aligned}
&I(\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1M}; \cdots; \alpha_{N1}, \cdots, \alpha_{NM}) \\
&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\mu_s\nu_t\left(f(x_s, y_t)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\alpha_{kl}\varphi_k(x_s)\psi_l(y_t)\right)^2 \\
&=\min
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

由(2.9)所决定的参数 α_{ij}, 其对应的曲面称为乘积型最小二乘曲面. 容易看出, 当 $N=n$, $M=m$ 且在乘积型插值问题解存在且唯一的情况下, 乘积型最小二乘曲面变成插值曲面. 也即是说, 在二元情况下, 最小二乘法有插值法的自适应性. 利用多元函数的极值理论, 在(2.9)中令

$$
\frac{\partial I}{\partial \alpha_{ij}}=0, \quad i=1, 2, \cdots, N; \ j=1, 2, \cdots, M, \tag{2.10}
$$

便得到关于 $\{\alpha_{ij}\}$ 的 $N\cdot M$ 阶代数方程组:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\mu_s\nu_t\left[f(x_s, y_t)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\alpha_{kl}\varphi_k(x_s)\psi_l(y_t)\right] \\
&\quad\cdot\varphi_i(x_s)\psi_j(y_t)=0, \\
&\qquad i=1, 2, \cdots, N; \ j=1, 2, \cdots, M.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

同样的, 在 N, M 较大的情况下, 例如双三次 B 样条拟合, 要解一个 $N\cdot M$ 阶的代数方程组, 其计算量是相当大的, 还要占用数目很大的内存单元。

类似于乘积型插值, 我们用另外方法来代替(2.11)的求解, 不妨设 $M>N$.

作为第一步, 先固定 y_t, 求解最小二乘问题:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\mu_s\left(f(x_s, y_t)-\sum_{k=1}^{N}\beta_{kt}\varphi_k(x_s)\right)^2=\min, \\
&\qquad t=1, 2, \cdots, M.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

易知 $\{\beta_{kt}\}_{k=1}^{N}$ 满足下列方程组

$$\sum_{s=1}^{n}\mu_s\left(f(x_s,\ y_t)-\sum_{k=1}^{N}\beta_{kt}\varphi_k(x_s)\right)\varphi_i(x_s)=0,$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{2.12)'$$

由(2.12)′，我们得到 β_{kt}，$t=1,\ 2,\ \cdots,\ M$，用 L_x 表示对函数 $f(x,\ y)$ 作 x 方向的最小二乘拟合，则有

$$L_x f(x,\ y_t)=\sum_{k=1}^{N}\beta_{kt}\varphi_k(x),\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ M.$$

第二步，记 L_y 是方向 y 的最小二乘拟合，又记曲面 $z=\sum_{l=1}^{M}r_l(x)\psi_l(y)$，其中 $r_l(x)$ 是待定函数，满足

$$\sum_{t=1}^{m}\nu_t\left(\sum_{l=1}^{M}r_l(x)\psi_l(y_t)-\sum_{k=1}^{N}\beta_{kt}\varphi_k(x)\right)^2=\min. \tag{2.13}$$

由(2.13)导得 $\{r_l(x)\}_1^M$ 满足下列方程组

$$\sum_{t=1}^{m}\nu_t\left(\sum_{l=1}^{M}r_l(x)\psi_l(y_t)-\sum_{k=1}^{N}\beta_{kt}\varphi_k(x)\right)\psi_j(y_t)=0,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ M. \tag{2.13)'$$

由(2.13)′知，$r_l(x)$ 可表为 $\varphi_1(x)$，$\cdots$，$\varphi_N(x)$ 的线性组合，即 $r_l(x)=\sum_{k=1}^{N}\mu_{kl}\varphi_k(x)$，并由此得到曲面

$$z=\sum_{l=1}^{M}r_l(x)\psi_l(y)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\mu_{kl}\varphi_k(x)\psi_l(y). \tag{2.14}$$

我们来验明，由(2.14)定义的曲面与由(2.11)所决定的曲面是一致的，事实上，在(2.13)′中令 $x=x_s$ 再乘以 $\mu_s\varphi_i(x_s)$ 并对 s 求和有

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\mu_s\nu_t\left(\sum_{l=1}^{M}r_l(x_s)\psi_l(y_t)-\sum_{k=1}^{N}\beta_{kt}\varphi_k(x_s)\right)\psi_j(y_t)\varphi_i(x_s)=0,$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ M.$$

再注意到(2.12)′，将上式中的 β_{kl} 消去有

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\mu_s\nu_t\left(\sum_{l=1}^{M}r_l(x_s)\psi_l(y_t)-f(x_s,\ y_t)\right)\varphi_i(x_s)\psi_j(y_t)=0,$$

将 $r_l(x_s)=\sum_{k=1}^{N}\mu_{kl}\varphi_i(x_s)$ 代入上式便得所证.

这里需要指出的是仅须求一个 N 阶和 M 阶矩阵的逆便得到(2.12)′和(2.13)′的解.

§3 广义双三次样条曲面

3-1 调整曲线曲面形状的控制参数

在构造曲线、曲面时，常碰到这样的问题，基于逼近和几何上的要求，需要对曲线或曲面作局部修改，在前面章节中，我们介绍了几种局部修改方法，即熟知的型值修改法，变动样条结点方法. 通过三次 Hermite 插值的四个参数的选择来调整曲线的形状是一个极重要的方法，它能兼顾逼近与几何两方面的要求，并能将 C^1 类的曲线变成 C^2 类. 实际上，在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上是分片三次多项式且满足插值条件 $s(x_i)=\alpha_i$, $s(x_{i+1})=\alpha_{i+1}$, $s'(x_i)=\beta_i$, $s'(x_{i+1})=\beta_{i+1}$, $i=0,\ 1,\ \cdots,\ k$ 的函数 $s(x)$ 按第三章 §1 的推导，如记 $s(x)$ 在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上的表达式为 $s_i(x)$，则有

$$s_i(x)=(u^3,\ u^2,\ u,\ 1)\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_{i+1}\\ h_i\beta_i\\ h_i\beta_{i+1}\end{pmatrix}.$$

其中 $u=\dfrac{x-x_i}{h_i}$, $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, $0\leqslant u\leqslant 1$. 在 $[a,\ b]$ 上 $s_i(x)$ 属于 C^1 类. 要它属于 C^2 类，只要注意到

$$s_i''(x)=\frac{2}{h_i^2}(3u,\ 1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_{i+1}\\ h_i\beta_i\\ h_i\beta_{i+1}\end{pmatrix},$$

$$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$$

及

$$s_{i-1}''(x)=\frac{2}{h_{i-1}^2}(3\tilde{u},\ 1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{i-1}\\ \alpha_i\\ h_{i-1}\beta_{i-1}\\ h_{i-1}\beta_i\end{pmatrix},$$

$x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$, $\tilde{u}=\dfrac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}$, 令 $s_i''(x_{i+})=s_{i-1}''(x_{i-})$. 得到 $s(x)\in C^2[a,\ b]$ 的充要条件：参数 $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$ 满足下列方程组

$$\begin{aligned}&\frac{2h_i}{h_{i-1}+h_i}\beta_{i-1}+4\beta_i+\frac{2h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\beta_{i+1}\\ &\quad=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left[h_{i-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{h_i}+h_i\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{h_{i-1}}\right],\\ &\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.\end{aligned}\tag{3.1}$$

如果 $\alpha_j=f(x_j)$, $j=0, 1, \cdots, k+1$ 便得到熟知的三转角方程. 如果 α_j 不等于 $f(x_j)$, 也可利用(3.1)来决定 β_i 的值, 使曲线属于 C^2 类. 反之, 若给出 β_j 的值, 即先考虑几何上的要求, 那末按(3.1), 我们将 α_i 当未知数, 也可适当选择一组 α_i 使曲线属于 C^2 类. 例如, 磨光曲线或三次 B 样条曲线, 可看作这样的问题, 先取定 $\beta_j=\dfrac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2h}$, 其中 $h=x_{j+1}-x_j$, $j=0,\ 1,\ \cdots,\ k$, 则 $\{\alpha_i\}$ 满足

$$\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}=\frac{1}{6}[f(x_{i+2})-f(x_{i-2})+4(f(x_{i+1})-f(x_{i-1}))],$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

注意到上式右端可写成

$$f(x_{i+1})+\frac{1}{6}\Delta^2 f(x_i)-\left(f(x_{i-1})+\frac{1}{6}\Delta^2 f(x_{i-2})\right),$$

因而，α_i 的一种方便取法是令 $\alpha_i=f(x_i)+\frac{1}{6}\Delta^2 f(x_{i-1})$. 总而言之，形形式式的 C^2 类三次样条曲线都由(3.1)产生.

在第3章，我们还研究了高精度磨光公式及 τ 样条，其实质是通过增加样条结点来调整曲线的位置.

这里，自然地会想到调整曲线的第三个方法，即通过基函数的(微小)变动来调整曲线的形状. 举例说，在 $[x_i, x_{i+1}]$，$s(x)$ 不是三次多项式，而是函数 $1, x, x^2, x^3\varphi_p(x)$ 的线性组合，这里 p 是依赖于 i 的参数，且当 $p=0$ 时 $\varphi_0(x)\equiv 1$，即退化为普通的三次多项式样条. 我们设想，通过控制参数 p 的微小摄动便能达到曲线修改的目的. 从更广泛的意义讲，$s(x)$ 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上可以是依赖于 i 的四个函数 $\varphi_{1,i}(x)$, $\varphi_{2,i}(x)$, $\varphi_{3,i}(x)$, $\varphi_{4,i}(x)$ 的线性组合，即广义样条.

下面，我们先来叙述这类曲线的构造，然后将它推广为乘积型的广义双三次样条曲面.

3-2 广义三次 Hermite 样条

先来看一个简单的事实，假定 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ 在[0, 1]上具有二阶连续导数，且行列式

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0) \\ \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \varphi_3'(0) & \varphi_4'(0) \\ \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) & \varphi_3'(1) & \varphi_4'(1) \end{vmatrix}\neq 0. \tag{3.2}$$

设 $s(x)$ 在[0, 1]可表为 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ 的线性组合，则插值问题

$$\left.\begin{array}{ll} s(0)=\alpha_0, & s(1)=\alpha_1, \\ s'(0)=\beta_0, & s'(1)=\beta_1 \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

的解是存在且唯一的，且可表为

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & s(x) \\ \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0) & \alpha_0 \\ \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) & \alpha_1 \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \varphi_3'(0) & \varphi_4'(0) & \beta_0 \\ \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) & \varphi_3'(1) & \varphi_4'(1) & \beta_1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.4}$$

或写成

$$s(x)=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1)(H_{00}(x),\ H_{10}(x),\ \cdot H_{01}(x),\ H_{11}(x))^T. \tag{3.4'}$$

其中函数 $H_{ij}(x)$ 由(3.4)解出，且可写成 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ 的线性组合，并有

$$H_{ij}^{(k)}(l)=\delta_{il}\,\delta_{jk}.$$

如果是在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上考虑插值问题

$$\left.\begin{array}{ll} s(x_i)=\alpha_i, & s(x_{i+1})=\alpha_{i+1}, \\ s'(x_i)=\beta_i, & s'(x_{i+1})=\beta_{i+1}. \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

则通过变换替换，将它转化为 $[0,\ 1]$ 区间的插值问题(3.2)，即相应的插值函数为

$$s(x)=(\alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ h_i\beta_i,\ h_i\beta_{i+1}) \cdot\left(H_{00}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ H_{10}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ H_{01}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ H_{11}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\right)^T. \tag{3.6}$$

进一步，考虑 $[a, b]$ 上分片插值问题．给定 $[a, b]$ 的分划．

$$\pi:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}=b,$$

我们在 $C'[a,\ b]$ 中寻找函数 $s(x)$，它满足

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{(i) } s(x)\text{在每个子区间}(x_i,\ x_{i+1})\text{上是函数} \\
\quad \varphi_{1,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right), \varphi_{2,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right), \\
\quad \varphi_{3,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right), \varphi_{4,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \\
\quad \text{的线性组合}, i=0,\ 1,\ \cdots,\ k; \\
\text{(ii) } s(x_i)=\alpha_i,\ s'(x_i)=\beta_i,\ \alpha_i,\ \beta_i\text{ 为适定参} \\
\quad \text{数}, i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1.
\end{array}\right\} \tag{3.7}
$$

容易推知，当(3.2)的条件满足(其中，函数 $\varphi_k(x)$ 换成 $\varphi_{k,i}(x)$)，则 $s(x)$ 在每个子区间 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上可唯一地表成

$$
\begin{aligned}
s(x) = (\alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ h_i\beta_i,\ h_i\beta_{i+1}) & \\
\cdot\left(H_{00,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ H_{10,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\right. & \\
\left.H_{01,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ H_{11,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\right)^T. &
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

其中 $H_{kl,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$ 都是

$$
\varphi_{1,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ \varphi_{2,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ \varphi_{3,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right),\ \varphi_{4,i}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)
$$

的线性组合且满足

$$
H_{kl,i}^{\mu}(\nu) = \delta_{k\nu}\delta_{l\mu}. \tag{3.9}
$$

如同第 3 章 §1，参数 α_j 称为型值参数，β_j 称为导数参数. 假定给定函数 $f(x)$ 的一组步长为 h 的型值 $\{f(x_i)\}_{-1}^{k+2}$，取 $\alpha_j=f(x_j)$，$\beta_j=\dfrac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2h}$，称满足 (3.7) 的函数 $s(x)$ 为广义 Bessel 插值. 类似于第 3 章 §1，可定义广义 Akima 插值.

3-3 C^2 类的广义三次样条

怎样选取 α_i，β_i，使函数 $s(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有连续的二阶

导数？记 $s(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 的表达式 $s_i(x)$，$i=0, 1, \cdots, k$，并令

$$s''_{i-1}(x_{i-})=s''_i(x_{i+}),\quad i=1, 2, \cdots, k.$$

由(3.8)有

$$\lambda_i\beta_{i-1}+4\beta_i+\mu_i\beta_{i+1}=\xi_{i-1}\alpha_{i-1}+\xi_i\alpha_i+\xi_{i+1}\alpha_{i+1}, \tag{3.10}$$

$$i=1, 2, \cdots, k.$$

其中

$$\lambda_i=\frac{4h_iH''_{01,i-1}(1)}{h_iH''_{11,i-1}(1)-h_{i-1}H''_{01,i}(0)},$$

$$\mu_i=\frac{-4h_{i-1}H'_{11,i}(0)}{h_iH''_{11,i-1}(1)-h_{i-1}H''_{01,i}(0)},$$

$$\xi_{i-1}=\frac{-4h_iH'_{00,i-1}(1)}{h_{i-1}[h_iH''_{11,i-1}(1)-h_{i-1}H''_{01,i}(0)]},$$

$$\xi_{i+1}=\frac{4h_{i-1}H''_{10,i}(0)}{h_i[h_iH''_{11,i-1}(1)-h_{i-1}H''_{01,i}(0)]},$$

$$\xi_i=\frac{4(h_{i-1}^2H''_{00,i}(0)-h_i^2H_{10,i-1}(1))}{h_{i-1}h_i(h_iH''_{11,i-1}(1)-h_{i-1}H''_{01,i}(0))},$$

$$i=1, 2, \cdots, k.$$

这里，不妨假定 $h_iH''_{11,i-1}(1)-h_{i-1}H''_{01,i}(0)\neq 0$。

如果是三次多项式样条，容易求得

$$\left.\begin{aligned}
H_{00,i}(x)&=2x^3-3x^2+1;\\
H_{10,i}(x)&=3x^2-2x^3;\\
H_{01,i}(x)&=x^3-2x^2+x;\\
H_{11,i}(x)&=x^3-x^2.
\end{aligned}\right\}$$

进一步求得 $H''_{00,i}(0)=-6$, $H''_{00,i}(1)=6$; $H''_{10,i}(0)=6$, $H''_{10,i}(1)=-6$; $H''_{01,i}(0)=-4$, $H''_{01,i}(1)=2$; $H''_{11,i}(0)=-2$, $H''_{11,i}(1)=4$, 将它代入(3.10)便得到著名的三转角方程

$$\frac{2h_i}{h_{i-1}+h_i}\beta_{i-1}+4\beta_i+\frac{2h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\beta_{i+1}$$

$$=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left[\frac{h_{i-1}}{h_i}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)+\frac{h_i}{h_{i-1}}(\alpha_i-\alpha_{i-1})\right],$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

由(3.10)知，通过参数 α_j, β_j 的各种选择，得到各式各样属于 C^2 类的广义三次样条曲线.

作为一个特例，我们假定 $s(x)$在 $[0,\ 1]$ 区间上是函数 $1,\ x,\ x^2,\ x^3e^{px}$ 的线性组合，并满足插值条件 $s(0)=\alpha_0$, $s(1)=\alpha_1$; $s'(0)=\beta_0$, $s'(1)=\beta_1$. 这时对应于(3.2)的行列式成为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & e^p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & (3+p)e^p \end{vmatrix}=-(1+p)e^p.$$

易知 $p\neq-1$ 时，插值问题的解存在、唯一，且可表成

$$s(x)=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1)$$
$$\cdot(H_{00}(x),\ H_{10}(x),\ H_{01}(x),\ H_{11}(x))^T.$$

其中

$$\left.\begin{aligned} H_{00}(x)&=\left[1-\left(1+\frac{2}{1+p}\right)x^2+\frac{2}{(1+p)e^p}x^3e^{px}\right];\\ H_{10}(x)&=\left[\left(1+\frac{2}{1+p}\right)x^2-\frac{2}{(1+p)e^p}x^3e^{px}\right];\\ H_{01}(x)&=\left[x-\left(1+\frac{1}{1+p}\right)x^2+\frac{1}{(1+p)e^p}x^3e^{px}\right];\\ H_{11}(x)&=\left[-\frac{1}{1+p}x^2+\frac{1}{(1+p)e^p}x^3e^{px}\right]. \end{aligned}\right\}\quad(3.11)$$

将 $s(x)$写成矩阵形式有

$$s(x)=(x^3e^{px},\ x^2,\ x,\ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{(1+p)e^p} & \frac{-2}{(1+p)e^p} & \frac{1}{(1+p)e^p} & \frac{1}{(1+p)e^p}\\ -1-\frac{2}{1+p} & 1+\frac{2}{1+p} & -1-\frac{1}{1+p} & -\frac{1}{1+p}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

下面，将这一问题推广为插值问题(3.7)，则

$$s(x)=(u^3e^{p_iu},\ u^2,\ u,\ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{(1+p_i)e^{p_i}} & \frac{-2}{(1+p_i)e^{p_i}} & \frac{1}{(1+p_i)e^{p_i}} & \frac{1}{(1+p_i)e^{p_i}}\\ -1-\frac{2}{1+p_i} & 1+\frac{2}{1+p_i} & -1-\frac{1}{1+p_i} & -\frac{1}{1+p_i}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_{i+1}\\ h_i\beta_i\\ h_i\beta_{i+1}\end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

这里 $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, $u=\dfrac{x-x_i}{h_i}$, p_i 是依赖于 i 的参数，对于呈现指数特征的常微分方程 Stiff 问题，用这类函数去建立数值解无疑是十分有益的。

由(3.13)我们来选择参数 α_j, β_j 使 $s(x)$ 属于 C^2 类函数。为此，记 $\varphi(x)=x^3e^{px}$ 有 $\varphi''(0)=0$, $\varphi''(1)=(6+6p+p^2)e^p$。由(3.11)有

$$H''_{00}(x)=-2\left(1+\frac{2}{1+p}\right)+\frac{2}{(1+p)e^p}\varphi''(x);$$

$$H''_{10}(x)=2\left(1+\frac{2}{1+p}\right)-\frac{2}{(1+p)e^p}\varphi''(x);$$

$$H''_{01}(x)=-2\left(1+\frac{1}{1+p}\right)+\frac{1}{(1+p)e^p}\varphi''(x);$$

$$H''_{11}(x)=\frac{1}{(1+p)e^p}\varphi''(x)-\frac{2}{1+p}.$$

相应于(3.10)，得到参数 α_j, β_j 要满足的条件

$$\lambda_i \beta_{i-1} + 4\beta_i + \mu_i \beta_{i+1}$$
$$= \xi_{i-1} \alpha_{i-1} + \xi_i \alpha_i + \xi_{i+1} \alpha_{i+1}, \qquad (3.14)$$
$$i = 1, 2, \cdots, k.$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{4h_i(p_{i-1}^2 + 4p_{i-1} + 2)(1+p_i)}{h_i(p_{i-1}^2 + 6p_{i-1} + 4)(1+p_i) + h_{i-1}(2p_i + 4)(1+p_{i-1})}; \\
\mu_i &= \frac{8h_{i-1}(1+p_{i-1})}{h_i(4+6p_{i-1}+p_{i-1}^2)(1+p_i) + 2h_{i-1}(2+p_i)(1+p_{i-1})}; \\
\xi_{i-1} &= \frac{-8h_i(p_{i-1}^2 + 5p_{i-1} + 3)(1+p_i)}{h_{i-1}[h_i(4+6p_{i-1}+p_{i-1}^2)(1+p_i) + 2h_{i-1}(2+p_i)(1+p_{i-1})]}; \\
\xi_{i+1} &= \frac{8h_{i-1}(3+p_i)(1+p_{i-1})}{h_i[h_i(4+6p_{i-1}+p_{i-1}^2)(1+p_i) + 2h_{i-1}(2+p_i)(1+p_{i-1})]}; \\
\xi_i &= \frac{8[h_i^2(p_{i-1}^2 + 5p_{i-1} + 3)(1+p_i) - h_{i-1}^2(3+p_i)(1+p_{i-1})]}{h_{i-1} h_i[h_i(4+6p_{i-1}+p_{i-1}^2)(1+p_i) + 2h_{i-1}(2+p_i)(1+p_{i-1})]}.
\end{aligned}\right\}$$
$$(3.15)$$

当 p_i 在 0 附近扰动时, (3.14) 左端关于 β_i 的系数矩阵是对角占优的, 此外, 当步长是等距时, 可以验明当

$$p_i > \sqrt{3} - 3 \approx -0.7639321 \quad (i = 0, 1, \cdots, k)$$

时恒有 $|\lambda_i| + |\mu_i| < 4$, 即 (3.14) 是对角占优的; 而当

$$-\frac{1}{2} \leqslant p_i \leqslant 5 \quad (i = 0, 1, \cdots, k)$$

时恒有 $|\lambda_i| + |\mu_i| \leqslant 3$; 若所有的 p_i 均为 0, 即退化为普通三次多项式样条, 这时恒有 $|\lambda_i| + |\mu_i| \leqslant 2$.

我们来看一个简单的例子, 说明通过 p_i 的扰动, 能调整曲线的形状. 研究 Hermite 插值问题:

$$\left.\begin{aligned}
s(0) &= -\frac{1}{8}, \quad s(1) = \frac{1}{8}, \\
s'(0) &= \frac{3}{4}, \quad s'(1) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}\right\}$$

相应的基函数为 $1, x, x^2, x^3e^{px}$. 计算结果表明, $p=0$ 时, $x=\frac{1}{2}$ 是 $s(x)$ 的拐点; $p=0.3$ 时, 拐点的位置往右移, 落在 $[0.7, 0.8]$ 中; $p=0.5$ 时, 在 $[0, 1]$ 中无拐点; 而当 p_i 取负值时, 拐点的位置往左移.

用这种广义三次样条作曲线拟合时, 先可置所有 $p_i=0$, $i=0, 1, \cdots, k$(这时退化为三次多项式样条), 然后在需要时对曲线形状进行调整的那些区间, 给 p_i 一个扰动, 通过(3.10)去确定新的曲线, 若有必要, 可重复对 p_i 进行多次修改. 但是, 不管参数 α_i, β_i 和 p_i 如何选取, 只要(3.14)满足, $s(x)$ 便属于 C^2 函数类. 这里, 值得指出的是, 研制曲线拟合的数学软件是一件十分重要的事情. 我们在三次多项式样条中引入一组参数 $p_i(i=0, 1, \cdots, k)$, 相应的矩阵仍是三对角的, 如果连同参数 α_i, $\beta_i(i=0, 1, \cdots, k)$ 都计算在内, 那末, 在数学软件中包含了 $3(k+1)$ 个参数, 而且形形式式的 C^2 类样条曲线都必从这里产生. 若再加上电子计算机图形显示, 软件的灵活适应性便更大了.

3-4 C^1 类的广义双三次样条曲面

先来构造广义的双三次 Hermite 插值曲面. 对于 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 的分划:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b, \quad h_i=x_{i+1}-x_i;$$

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_M=d, \quad \tau_i=y_{i+1}-y_i.$$

在构作曲面的过程中, 先固定一个变量, 例如 x, 然后对 y 方向作 Hermite 插值, 记之为 $H_yf(x, y)$, 它在每个子区间 $[y_j, y_{j+1}]$ 上是 $1, v, v^2, v^3e^{q_{ij}v}$ 的线性组合, $v=\frac{y-y_j}{\tau_j}$, 并满足 Hermite 插值条件

$$
\left.\begin{array}{c}
H_y f(x, y_j)=f(x, y_j), \\
H_y f(x, y_{j+1})=f(x, y_{j+1}); \\
\dfrac{\partial}{\partial y} H_y f(x, y)\big|_{y=y_j}=f_y(x, y_j), \\
\dfrac{\partial}{\partial y} H_y f(x, y)\big|_{y=y_{j+1}}=f_y(x, y_{j+1}), \\
j=0, 1, \cdots, M.
\end{array}\right\}
$$

其中 $f_y(x, y_j)$ 表示函数 $f(x, y)$ 对 y 的偏导数并在 y_j 处取值. 由(3.13), $H_y f(x, y_j)$ 可写成

$$
\begin{aligned}
& H_y f(x, y) \\
& \quad =(f(x, y_j), f(x, y_{j+1}), \tau_j f_y(x, y_j), \tau_j f_y(x, y_{j+1})) A_{q_{ij}} V,
\end{aligned}
$$

其中

$$
A_{q_{ij}}=\begin{pmatrix}
\dfrac{2}{(1+q_{ij}) e^{q_{ij}}} & \dfrac{-2}{(1+q_{ij}) e^{q_{ij}}} & \dfrac{1}{(1+q_{ij}) e^{q_{ij}}} & \dfrac{1}{(1+q_{ij}) e^{q_{ij}}} \\
-1-\dfrac{2}{1+q_{ij}} & 1+\dfrac{2}{1+q_{ij}} & -1-\dfrac{1}{1+q_{ij}} & -\dfrac{1}{1+q_{ij}} \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
V=\begin{pmatrix}
v^3 e^{q_{ij} v} \\
v^2 \\
v \\
1
\end{pmatrix}.
$$

第二步, 对函数 $H_y f(x, y)$ 作 x 方向的 Hermite 插值, 即函数 $f(x, y_j)$, $f(x, y_{j+1})$, $\tau_j f_y(x, y_j)$, $\tau_j f_y(x, y_{j+1})$ 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上分别是函数 $1, u, u^2, u^3 e^{p_{ij} u}$ 的线性组合, $u=\dfrac{x-x_i}{h_i}$, 且满足相应的 Hermite 插值条件. 再一次利用(3.13)式, 便得到广义双三次的 Hermite 插值曲面.

$$
\begin{gathered}
z=H_x H_y f(x, y)=U^T A_{p_{ij}} M_{ij} A_{q_{ij}}^T V, \\
(u, v) \in[0, 1] \times[0, 1].
\end{gathered}
$$

其中

$$M_{ij}=\begin{bmatrix} f(x_i, y_j) & f(x_i, y_{j+1}) & \tau_j f_y(x_i, y_j) & \tau_j f_y(x_i, y_{j+1}) \\ f(x_{i+1}, y_j) & f(x_{i+1}, y_{j+1}) & \tau_j f_y(x_{i+1}, y_j) & \tau_j f_y(x_{i+1}, y_{j+1}) \\ h_i f_x(x_i, y_j) & h_i f_x(x_i, y_{j+1}) & h_i \tau_j f_{xy}(x_i, y_j) & h_i \tau_j f_{xy}(x_i, y_{j+1}) \\ h_i f_x(x_{i+1}, y_j) & h_i f_x(x_{i+1}, y_{j+1}) & h_i \tau_j f_{xy}(x_{i+1}, y_j) & h_i \tau_j f_{xy}(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{bmatrix},$$

$$U=\begin{bmatrix} u^3 e^{p_{ij}u} \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i=0, 1, \cdots, N-1; \ j=0, 1, \cdots, M-1.$$

矩阵 M_{ij} 的元素由四部分组成

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{位置} & V\ \text{斜度} \\ \hline U\ \text{斜度} & \text{扭度} \end{array}\right].$$

如果所有的 $p_{ij}=q_{ij}=0$. 则

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V=\begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}.$$

注意，在矩阵 M_{ij} 中除了位置能够给出外，斜度和扭度通常是不容易给出的. Barnhill 在[6]中曾指出，对于离散数据的曲面表示，可置扭度都等于0，但这样做，在双三次曲面中将出现"伪平点"，即平展点. 这些平展点的一个解释是，这个逼近仅仅对 u, v 的线性函数是精确的，这就与原来双三次曲面片的精度大为不同. 这里，我们建议用数值微分公式来近似替代斜度和扭度，例如应用 Bessel 公式(见第3章§1)

$$f_x(x_i, y_j)\approx\frac{h_i[x_{i-1}, x_i]f(\cdot, y_j)+h_{i-1}[x_i, x_{i+1}]f(\cdot, y_j)}{h_i+h_{i+1}}$$

来代替斜度，其中 $f(\cdot, y_j)$ 表示差商是对 x 作用的. 对 $f_{xy}(x_i, y_j)$ 也用 Bessel 公式，即先对 x 后对 y 求差商，便得到

扭矢的近似公式．我们先粗糙地处理 M_{ij}，然后利用参数 p_{ij}，q_{ij} 来调整曲面的形状．这种 C^1 类曲面的一个重要优点是不需要修改型值(当然，必要时要先粗光顺)，然后在每一曲面片上，调整 p_{ij}，q_{ij} 的值，它只改变小区域$[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$上曲面的形状，其它区域的曲面形状并无变化．由此可知，对三次样条引入一个带有参数 p_{ij} 的基函数是有好处的．当然，这个基函数不一定是 $x^3e^{p_{ij}x}$，换成 $x^3\varphi(x, p_{ij})$ 也行，只要 $\varphi(x, 0)\equiv 1$．研制这样具有人机对话功能的曲面数学软件对用户是有意义的．

3-5 广义双三次样条插值曲面

这里，我们将双三次样条插值曲面推广到带有扰动基函数，即基函数 $x^3e^{p_{ij}x}$、$y^3e^{q_{ij}y}$ (参数 p_{ij}，q_{ij} 在 0 附近扰动，用于调整曲面的形状)．

给定矩形域 $R=[a, b]\times[c, d]$ 的一个分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,\ h_i=x_{i+1}-x_i,\ u=\frac{x-x_i}{h_i},$$

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_M=d,\ \tau_i=y_{i+1}-y_i,\ v=\frac{y-y_i}{\tau_i}.$$

称满足下列条件的曲面为广义双三次样条插值曲面：

(i) 在每个子矩形 $R_{ij}=[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$ 上，曲面 $s(x, y)$ 可表为乘积型形式

$$s(x, y)=\sum_{i,j=0}^{3}\alpha_{ij}\varphi_i(u)\psi_j(v),\ (u, v)\in[0, 1]\times[0, 1].$$

其中 $\varphi_1(u)=1$，$\varphi_2(u)=u$，$\varphi_3(u)=u^2$，$\varphi_4(u)=u^3e^{p_{ij}u}$；$\psi_1(v)=1$，$\psi_2(v)=v$，$\psi_3(v)=v^2$，$\psi_4(v)=v^3e^{q_{ij}v}$.

(ii) 在整个矩形域 R 上函数 $s(x, y)$ 的偏导数

$$\frac{\partial^{(\alpha+\beta)}s(x, y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\quad(\alpha, \beta=0, 1, 2)$$

是连续的．即曲面在 R 上有直到四阶的混合连续导数（但不包含超过二阶的单向偏导数，例如 $\frac{\partial^3 s(x, y)}{\partial x^2 \partial y}$ 等）．

(iii) 在矩形的网格上，满足

$$s(x_i, y_j)=f(x_i, y_j)=f_{ij},$$
$$i=0, 1, \cdots, N; j=0, 1, \cdots, M.$$

(iv) 此外，在边界上还满足给定的已知数：

$$s'_x(a, y_j)=m_{0,j}, \ s'_x(b, y_j)=m_{N,j}, \ j=0, 1, \cdots, M;$$
$$s'_y(x_i, c)=g_{i,0}, \ s'_y(x_i, d)=g_{i,M}, \ i=0, 1, \cdots, N.$$

(v) 在矩形 R 的四个结点上满足扭矢条件

$$s''_{xy}(a, c)=l_{0,0}, \quad s''_{xy}(a, d)=l_{0,M},$$
$$s''_{xy}(b, c)=l_{N,0}, \quad s''_{xy}(b, d)=l_{N,M}.$$

下面，我们来构作这个曲面．记

$$s'_x(x_i, y_j)=m_{i,j}, \ s'_y(x_i, y_j)=g_{i,j}, \ s''_{xy}(x_i, y_j)=l_{i,j}.$$

第一步，固定 $y=y_j$，由条件(i)知，$s(x, y_j)$是四个函数 $\varphi_1(u)$，$\varphi_2(u)$，$\varphi_3(u)$，$\varphi_4(u)$线性组合，要它具有关于 x 的二阶连续偏导数，由(3.14)得到

$$\begin{aligned}&\lambda_i m_{i-1,j}+4m_{i,j}+\mu_i m_{i+1,j}\\&\quad=\xi_{i-1}f_{i-1,j}+\xi_i f_{i,j}+\xi_{i+1}f_{i+1,j},\\&\qquad i=1, 2, \cdots, N-1.\end{aligned} \tag{3.16}$$

由于 $m_{0,j}$，$m_{N,j}$ 已给，故当上式左端的系数行列式不等于零时，可解得一组 $\{m_{ij}\}_{i=1}^{N-1}$，$j=0, 1, \cdots, M$．显然，(3.16)共要解 $M+1$ 个 $N-1$ 阶的代数方程组．此时，(3.15)中的 p_i 应换成 p_{ij}，如果 p_{ij} 与 j 无关，那末(3.16)左端的系数矩阵与 j 无关，这时只须求一个 $N-1$ 阶的逆矩阵便够了．这一步，保证了曲面沿 x 方向具有二阶连续偏导数．并得到所有的 $s'_x(x_i, y_j)$，$i=0, 1, \cdots, N$；$j=0, 1, \cdots, M$．

第二步，与第一步相对称，固定 $x=x_i$，类似于(3.14)，将(3.15)中的 h_j 换成 τ_j，p_{ij} 换成 q_{ij}，并相应地记 λ_i，μ_i，ξ_{i-1}，ξ_i，ξ_{i+1} 为 λ_i^*，μ_i^*，ξ_{i-1}^*，ξ_i^*，ξ_{i+1}^*，便得到决定 $\{g_{i,j}\}$ 的代数方程组

$$\begin{aligned}&\lambda_j^* g_{i,j-1}+4g_{i,j}+\mu_j^* g_{i,j+1}\\&\quad=\xi_{j-1}^* f_{i,j-1}+\xi_j^* f_{i,j}+\xi_{j+1}^* f_{i,j+1},\\&\qquad i=1,2,\cdots,M-1.\end{aligned}\tag{3.17}$$

$g_{i,0}$，$g_{i,M}$ 由条件(iv)给出，这一步，要解 $N+1$ 个 $M-1$ 阶的代数方程组，并得到所有 $s_y'(x_i, y_j)$，$i=0, 1, \cdots, N$；$j=0, 1, \cdots, M$。曲面 $s(x, y)$ 沿 y 方向具有二阶连续偏导数。

第三步，我们来求 $s_{xy}''(x_i, y_j)$，进而通过(3.16)将这个曲面确定下来。为此，先固定 $x=x_i$，则函数 $s_x''(x_i, y)$ 仍可写成 $\psi_1(v)$，$\psi_2(v)$，$\psi_3(v)$，$\psi_4(v)$ 的线性组合，注意到 $s_x'(x_i, y_j)=m_{i,j}$ 已求出，便能得到决定 $\{l_{ij}\}$ 的代数方程组

$$\begin{aligned}&\lambda_j^* l_{i,j-1}+4l_{i,j}+\mu_j^* l_{i,j-1}\\&\quad=\xi_{i-1}^* m_{i,j-1}+\xi_i^* m_{i,j}+\xi_{i+1}^* m_{i,j+1},\\&\qquad j=1,2,\cdots,M-1.\end{aligned}\tag{3.18}$$

这里，尚须给出 $l_{i,0}$，$l_{i,M}$ 才能将 $l_{i,j}$ 确定下来，为此，注意到 $s_y'(x, c)$，$s_y'(x, d)$ 均可由函数 $\varphi_1(u)$，$\varphi_2(u)$，$\varphi_3(u)$，$\varphi_4(u)$ 线性表出，且 $s_y'(x_i, c)=g_{i,0}$，$s_y'(x_i, d)=g_{i,M}$ 由(3.16)获得，则 $l_{i,0}$，$l_{i,M}$ 由下列方程组所决定

$$\begin{aligned}&\lambda_i l_{i-1,j}+4l_{i,j}+\mu_i l_{i+1,j}=\xi_{i-1} g_{i-1,j}+\xi_i g_{i,j}+\xi_{i+1} g_{i+1,j}\\&\qquad i=1,2,\cdots,N-1;\ j=0, M.\end{aligned}\tag{3.19}$$

由于 $l_{0,0}$，$l_{N,0}$，$l_{0,M}$，$l_{N,M}$ 由条件(v)给出，$l_{i,0}$，$l_{i,M}$ 便由(3.19)唯一地确定下来。

这样的曲面是否满足(ii)的各种条件，留给读者去思考。当所有 $p_{ij}=q_{ij}=0$ 时，在苏步青、刘鼎元著《计算几何》一书

中讨论了插值问题解的存在唯一性.

对于一类实验数据,例如,地质、水文中的数据,边界条件(iv)(v)中的数是无法给出的. 我们建议采用 de Boor 减少样条结点的办法来解决,即将边界条件(iv)换成(iv)′:

$$
\left.\begin{aligned}
&h_1 m_{0,j}+(h_0+h_1)m_{1,j}\\
&\quad=\frac{[h_0+2(h_0+h_1)]h_1[x_0,x_1]f(\cdot,y_j)+h_0^2[x_1,x_2]f(\cdot,y_j)}{h_0+h_1},\\
&(h_{N-1}+h_{N-2})m_{N-1,j}+h_{N-2}m_{N,j}\\
&\quad=\{h_{N-1}^2[x_{N-2},x_{N-1}]f(\cdot,y_j)\\
&\qquad+[2(h_{N-1}+h_{N-2})+h_{N-1}]h_{N-2}[x_{N-1},x_N]f(\cdot,y_j)\}\\
&\qquad\times(h_{N-1}+h_{N-2})^{-1},\\
&\tau_1 g_{i,0}+(\tau_0+\tau_1)g_{i,1}\\
&\quad=\frac{[\tau_0+2(\tau_0+\tau_1)]\tau_1[y_0,y_1]f(x_i,\cdot)+\tau_0^2[y_0,y_1]f(x_i,\cdot)}{\tau_0+\tau_1},\\
&(\tau_{N-1}+\tau_{N-2})g_{i,N-1}+\tau_{N-2}g_{i,N}\\
&\quad=\{\tau_{N-1}^2[y_{N-2},y_{N-1}]f(x_i,\cdot)\\
&\qquad+[2(\tau_{N-1}+\tau_{N-2})+\tau_{N-1}]\tau_{N-2}[y_{N-1},y_N]f(x_i,\cdot)\}\\
&\qquad\times(\tau_{N-1}+\tau_{N-2})^{-1},\\
&\qquad\qquad i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,M.
\end{aligned}\right\}
$$

而条件(v)可换成(v)′:

$$l_{0,0}=l_{0,M}=l_{N,0}=l_{N,M},$$

即认为边界顶点的扭矢等于0, 对于几何上要求不高的实验数据拟合问题,是容许这样做的.

3-6 双 k 次磨光曲面

对于仅给出 $f(x,y)$ 的离散数据 $f(x_s,y_t)$ 的实际问题,特别在 $f(x_s,y_t)$ 含有观测误差的情况下, 利用矩形网格点上的函数值, 分别作磨光曲线的乘积型逼近, 可获得 C^k 类的光滑逼近曲面,这类曲面的构造仅依赖于矩形网格上的 $f(x,y)$ 的

函数值，但要求 x、y 方向的分划必须是等距的. k 次磨光曲面也称之为双 k 次 B 样条曲面. 记等距节点 $x_i=a+ih$, $h=\frac{b-a}{N}$, $y_j=c+j\tau$, $\tau=\frac{d-c}{M}$; x 方向的磨光算子为 S_x, y 方向的磨光算子为 S_y, 于是得到双 k 次磨光曲面

$$z=S_yS_xf(x,y)$$
$$=\sum_j\sum_i f(x_i,y_j)\Omega_k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\Omega_k\left(\frac{y-y_j}{\tau}\right),\quad(3.20)$$

令 $u=\frac{x-x_i+\frac{k-1}{2}}{h}$, $v=\frac{y-y_j+\frac{k-1}{2}}{\tau}$, 得到 z 在 u, v 的正方形域 $[0,1]\times[0,1]$ 上的表达式

$$z=S_yS_xf(x,y)=\frac{1}{(k!)^2}U_k^TA_kF_kA_k^TV_k,\quad(3.21)$$

其中
$$U_k^T=(u^k,u^{k-1},\cdots,u,1),$$
$$V_k^T=(v^k,v^{k-1},\cdots,v,1),$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&2&0\\1&1&0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}-1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&0&3&0\\1&4&1&0\end{pmatrix}.$$

等等. F_k 则为 $k+1$ 阶方阵, $F_k=(f_{\alpha\beta})$, $\alpha=i,i+1,\cdots,i+k$; $\beta=j,j+1,\cdots,j+k$.

读者不难利用第 3 章的局部逼近曲线，构造各类的乘积型曲面. 例如，由第 3 章 §3 中的 3-1, 我们可导得含控制参数的三次乘积型曲面，记 P_x, P_y 分别为 x, y 方向的含控制

参数 λ, μ 的三次样条曲线，由 §3 的(3.3)式有

$$P_x f(x, y) = (u^3, u^2, u, 1)$$
$$\cdot M_\lambda (f(x_{i-1}, y), f(x_i, y), f(x_{i+1}, y), f(x_{i+2}, y))^T,$$

其中

$$M_\lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\lambda-1 & -12\lambda+3 & 12\lambda-3 & -4\lambda+1 \\ -6\lambda+2 & 18\lambda-5 & -18\lambda+4 & 6\lambda-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda & 2-4\lambda & 2\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \mathrm{FR}\left(\frac{x-x_0}{h}\right), \quad i = \mathrm{INT}\left(\frac{x-x_0}{h}\right).$$

类似的记

$$U = (u^3, u^2, u, 1)^T, \quad V = (v^3, v^2, v, 1)^T,$$

$$v = \mathrm{FR}\left(\frac{y-y_0}{\tau}\right), \quad j = \mathrm{INT}\left(\frac{y-y_0}{\tau}\right)$$

便得到含有两个控制参数 λ, μ 的乘积型曲面

$$z = P_y P_x f(x, y) = U^T M_\lambda G M_\mu^T V, \tag{3.22}$$

这里 G 是四阶矩阵，$G = (f_{\alpha\beta})$，$\alpha = i-1, \cdots, i+2$，$\beta = j-1, \cdots, j+2$. 通过 λ、μ 的不同选择，能调整曲面的形状，特别当 $\lambda = \mu = \frac{1}{6}$ 时，得到三次磨光曲面、$\lambda = \mu = 0$ 时成为 C^1 类的插值曲面，如此等等，还可通过 λ、μ 的选择使曲面满足某些几何要求. 如果分划是非等距的，则同样由第 3 章 §3(3.8)式可构作含两个参数 λ、μ 的三次样条乘积型曲面，一般讲，这类含控制参数的乘积型曲面属于 C^1 函数类.

§4 Gordon 技巧及 Boole 和曲面

先来研究乘积型曲面的逼近误差. 记 L_x、M_y 为 §2 定义的线性算子，而

$$R_x f(x, y) = f(x, y) - L_x f(x, y)$$
$$= (I - L_x) f(x, y),$$
$$R_y f(x, y) = f(x, y) - M_y f(x, y)$$
$$= (I - M_y) f(x, y),$$

其中 I 是单位算子．再记 $z = F(x, y) = M_y L_x f(x, y)$，则曲面 $F(x, y)$ 逼近曲面 $f(x, y)$ 的截断误差为

$$f(x, y) - F(x, y) = (I - M_y L_x) f(x, y)$$
$$= (I - (I - R_y)(I - R_x)) f(x, y)$$
$$= (R_x + R_y - R_y R_x) f(x, y). \qquad (4.1)$$

现在，引入新的曲面

$$z = (L_x + M_y - M_y L_x) f = g(x, y), \qquad (4.2)$$

则曲面 $z = g(x, y)$ 在某种意义上将能更好地逼近曲面 $z = f(x, y)$．事实上，我们有

$$f(x, y) - g(x, y) = (I - L_x - M_y + M_y L_x) f(x, y)$$
$$= (I - (I - R_x) - (I - R_y)$$
$$+ (I - R_x)(I - R_y)) f(x, y)$$
$$= R_y R_x f(x, y). \qquad (4.3)$$

在第 1 章 § 1，我们研究了这种算子，即将 $L_x + M_y - M_y L_x$ 记成算子 L_x、M_y 的布尔和 $L_x \oplus M_y$，并讨论了它的几何意义及精度．现在，我们研究具体的乘积型插值问题，即寻找 $\{\alpha_{ij}\}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} \varphi_i(x_s) \psi_j(y_t) = f(x_s, y_t),$$
$$s = 1, 2, \cdots, N; \ t = 1, 2, \cdots, M.$$

假定 $\varphi_i(x)$、$\psi_j(y)$ 是关于 x、y 的 Lagrange 基函数，即满足 $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$，$\psi_i(y_j) = \delta_{ij}$．那末，插值算子 L_x (x 方向插值)、M_y (y 方向插值) 的布尔和曲面可写成

$$
\begin{aligned}
z &= g(x, y) \\
&= (L_x \oplus M_y) f(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) f(x_i, y) + \sum_{j=1}^{M} \psi_j(y) f(x, y_j) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \varphi_i(x) \psi_j(y) f(x_i, y_j).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

但是，$f(x_i, y)$、$f(x, y_j)$是不知道的，Gordon 应用了一个技巧，利用单位算子的分解，将 $g(x, y)$写成

$$
z = g(x, y) = (I L_x + M_y I - M_y L_x) f(x, y),
$$

对右端第一个单位算子用算子 M_y^* 去逼近，第二个单位算子用算子 L_x^* 去逼近，便得到新的曲面

$$
\begin{aligned}
z &= g^*(x, y) \\
&= (M_y^* L_x + M_y L_x^* - M_y L_x) f(x, y).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

其中，

$$
L_x^* f(x, y) = \sum_{i=1}^{N^*} \varphi_i^*(x) f(x_i^*, y),
$$

$$
M_y^* f(x, y) = \sum_{j=1}^{M^*} \psi_j^*(y) f(x, y_j^*),
$$

这里 $\{x_i^*, i=1, 2, \cdots, N^*\}$ 是关于$[a, b]$区间的一个新分划点组，$N^* \gg N$；点组 $\{y_j^*, j=1, 2, \cdots, M^*\}$ 的定义也类似。而函数 $\varphi_i^*(x)$、$\psi_j^*(y)$ 分别是关于插值点 $\{x_i^*\}_1^{N^*}$、$\{y_j^*\}_1^{M^*}$ 的 Lagrange 基函数，即满足 $\varphi_i^*(x_j^*) = \delta_{ij}$，$\psi_i^*(y_j^*) = \delta_{ij}$。这样，$g^*(x, y)$可写成

$$
\begin{aligned}
z &= g^*(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M^*} \varphi_i(x) \psi_j^*(y) f(x_i, y_j^*) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N^*} \sum_{j=1}^{M} \varphi_i^*(x) \psi_j(y) f(x_i^*, y_j) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \varphi_i(x) \psi_j(y) f(x_i, y_j).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

记 L_x^*，M_y^* 逼近单位算子的误差为 R_x^*、R_y^*，即：$R_x^*=I-L_x^*$，$R_y^*=I-M_y^*$，可得

$$f(x,\ y)-g^*(x,\ y)$$
$$=(R_y^*+R_x^*+R_yR_x-R_y^*R_x-R_yR_x^*)f(x,\ y). \quad (4.6)$$

为了保证精度，必须使 R_y^*、R_x^* 具有 R_y、R_x 同样的精度。将(4.5)′应用于等距节点的三次样条插值，利用 Peano 定理，可以证明 R_y^*f，R_x^*f，R_yR_xf，$R_y^*R_xf$，$R_yR_x^*f$ 是一个有界量再分别乘上因子 $\frac{1}{(M^*)^4}$，$\frac{1}{(N^*)^4}$，$\frac{1}{(MN)^4}$，$\frac{1}{(M^*N)^4}$，$\frac{1}{(MN^*)^4}$。当我们取 $M^*=N^*=MN$，进而取 $M=N$ 时，那么 $g^*(x,\ y)$ 逼近 $f(x,\ y)$ 的精度将是 $\frac{1}{M^8}$。而计算 $g^*(x,\ y)$ 需要 $2M^3$ 个函数值。Powell 指出，通常情况下，为了达到 $\frac{1}{M^8}$ 的逼近阶，需要 M^4 个函数值。对比之下，看出 Gordon 技巧的优越性。无疑，单位算子的分解是多元函数逼近的一个有趣问题。

布尔和曲面是一种校正曲面，先引述 Barnhill 和 Gregory 1975 年导得的一个结果。

引理1 设 P、Q 是线性空间 X 到自身的线性算子。$\mathscr{L}$ 是 X 的子空间。如果算子 Q 能精确地再生子空间 $\mathscr{L}$（即对于任意的 $f\in\mathscr{L}$ 都有 $Qf=f$）。又设 $\{\lambda_i\}_1^n$ 是 X 上的线性泛函，算子 P 是满足下列条件的插值算子，即对于任意的 $f\in X$，插值函数 Pf 满足

$$\lambda_iPf=\lambda_if,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

那末，定义在 X 上的布尔和算子 $P\oplus Q=P+Q-PQ$ 具有 Q 的精度和 P 的插值性质。

证明 对任意 $f\in\mathscr{L}$，由 Q 的再生性有

$$(P\oplus Q)f=(Pf+Qf-PQf)=Pf+Qf-Pf=f.$$

其次，对于任意的$f\in X$有

$$\begin{aligned}\lambda_i(P\oplus Q)f&=\lambda_i Pf+\lambda_i Qf-\lambda_i PQf\\&=\lambda_i Pf+\lambda_i Qf-\lambda_i Qf=\lambda_i f,\\&\quad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

证毕.

例 1 令$X=C^2[x_i, x_{i+1}]$，Pf是过$[x_i, x_{i+1}]$端点的线性插值，Qf为过x_i，x_{i+1}三点的抛物插值，$x_j=x_0+jh$. 容易验明，对任意的$f\in X$有

$$(P\oplus Q)f=(P+Q-PQ)f=Qf.$$

所谓Coons曲面是双三次Hermite插值的Boole和. 为简单起见，考虑单位正方形域$\mathscr{D}=[0,1]\times[0,1]$. 记$x$、$y$方向的三次Hermite插值为$H_x f$、$H_y f$，称

$$z=H_x f+H_y f-H_x H_y f \tag{4.7}$$

为Coons曲面. 其中

$$H_x f=(\varphi_{00}(x),\ \varphi_{10}(x),\ \varphi_{01}(x),\ \varphi_{11}(x))\begin{bmatrix}f(0,y)\\f(1,y)\\f_x(0,y)\\f_x(1,y)\end{bmatrix},$$

$$H_y f(x,y)=(\varphi_{00}(y),\ \varphi_{10}(y),\ \varphi_{01}(y),\ \varphi_{11}(y))\begin{bmatrix}f(x,0)\\f(x,1)\\f_y(x,0)\\f_y(x,1)\end{bmatrix},$$

$$H_x H_y f(x,y)=(\varphi_{00}(x),\ \varphi_{10}(x),\ \varphi_{01}(x),\ \varphi_{11}(x))M\begin{bmatrix}\varphi_{00}(y)\\\varphi_{10}(y)\\\varphi_{01}(y)\\\varphi_{11}(y)\end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & f_y(0,0) & f_y(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) & f_y(1,0) & f_y(1,1) \\ f_x(0,0) & f_x(0,1) & f_{xy}(0,0) & f_{xy}(0,1) \\ f_x(1,0) & f_x(1,1) & f_{xy}(1,0) & f_{yy}(1,1) \end{bmatrix}.$$

这里函数 $\varphi_{00}, \varphi_{10}, \varphi_{01}, \varphi_{11}$ 的定义参见第 3 章§1. 由 Barnhill 引理, Coons 曲面具有 H_x 及 H_y 的插值性质, 和 H_x 及 H_y 的精度(因为 $P\oplus Q=Q\oplus P$), 换言之, Coons 曲面对函数 $x^\alpha y^\beta$, $0\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant 3$ 有再生性质.

§5 Shepard 方法

当观测数据的数目很大而又非规则, 特别是 $f(x, y)$ 在多处具有峰值时, 要拟合一个曲面是一件十分不容易的事情. 在这种情况下, 常采用局部逼近法. 因为, 全局逼近, 例如最小二乘法, 是一种平均意义下的逼近, 也就是说, 所建立的逼近曲面, 其峰值被"平均"削低了, 而平坦地方却拱高了. 为了适应每一点的变化状态(当问题对这点要求特别高, 例如趋势面的分析), 就有必要针对这一点单独建立一个曲面. 用一个例子来说明这个问题. 假定在 (x, y) 附近, 曲面被近似地看作平面

$$F(x, y)=ax+by+c. \tag{5.1}$$

用最小二乘法来决定 a、b、c, 即

$$\sum_{t=1}^{n}\omega_t(f(x_t, y_t)-ax_t-by_t-c)^2$$
$$=I(a, b, c)=\min. \tag{5.2}$$

其中 $(x_t, y_t)\,t=1, 2, \cdots, n$ "靠近"点 (x, y). 权因子 ω_t

$t=1, 2, \cdots, n$ 依赖于 x_t, y_t, x, y. 由(5.2), 求偏导数 $\frac{\partial I}{\partial a}$, $\frac{\partial I}{\partial b}$, $\frac{\partial I}{\partial c}$ 并令其等于零,便得到决定 a、b、c 的代数方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&a\sum_{t=1}^{n}\omega_t x_t^2+b\sum_{t=1}^{n}\omega_t x_t y_t+c\sum_{t=1}^{n}\omega_t x_t \\
&\quad=\sum_{t=1}^{n}\omega_t f(x_t, y_t)x_t, \\
&a\sum_{t=1}^{n}\omega_t x_t y_t+b\sum_{t=1}^{n}\omega_t y_t^2+c\sum_{t=1}^{n}\omega_t y_t \\
&\quad=\sum_{t=1}^{n}\omega_t f(x_t, y_t)y_t, \\
&a\sum_{t=1}^{n}\omega_t x_t+b\sum_{t=1}^{n}\omega_t y_t+c\sum_{t=1}^{n}\omega_t \\
&\quad=\sum_{t=1}^{n}\omega_t f(x_t, y_t).
\end{aligned}\right\} \tag{5.2$'$}
$$

关于(5.2)$'$解的讨论可参见一般最小二乘法的专著.

现在要问，那些(x_t, y_t)算是比较靠近点(x, y)呢？这里有几个原则供使用者选择. 以(x, y)为中心作具有固定半径或对角线长度的圆或正方形，凡是落在这个区域中的点就认为是(5.2)中的(x_t, y_t). 再则，也可以这样做，以(x, y)为中心作坐标架,在每个坐标象限都取一个固定数目的观测数据. 每个象限中又怎样来选择这些点呢？一个简单的办法是按照观测点(x_t, y_t)与(x, y)点的距离大小去决定取舍. (5.2)中 n 的大小还决定观测数据数目的大小. 一般来讲，n 不要超过10. 文献[10]中讨论了 n 选择的原则.

权因子 ω_t 的选取也是一个重要的问题. 取适当常数 r, 将 ω_t 取为

$$
\omega_t=\frac{(r-d_t)_+}{d_t}, \quad t=1, 2, \cdots, n, \tag{5.3}
$$

其中 $d_t=\sqrt{(x-x_t)^2+(y-y_t)^2}$, $(r-d_t)_+=\max(r-d_t,\ 0)$. (5.3)表明，以$(x,y)$为中心$r$为半径的圆域外的那些观测点，权系数为0. 而越靠近$(x,\ y)$的观测点，其权系数就越大. 这里，我们还默认，当$(x,\ y)$成为$(x_t,\ y_t)$时(这时ω_t变成无穷大)，$F(x,\ y)=f(x_t,\ y_t)$. 即

$$F(x,\ y)=\begin{cases} ax+by+c, & \text{当}(x,\ y)\text{是非观测点时;} \\ f(x_t,\ y_t), & \text{当}(x,\ y)\text{是观测点}(x_t,\ y_t)\text{时.} \end{cases}$$

这样，利用(5.1)(5.2)(5.3)便得到了拟合曲面(这里取的是平面，而且每一点对应的平面又不同)在任意一点的值. 这里，拟合函数的值放在首位来考虑，将整体上的拟合曲面放在次要的位置，也即是说拟合是局部进行的，函数值是逐点给出的，每算一个函数值就必解一个最小二乘的问题. 如果在(5.1)中取$a=b=0$, 即在$(x,\ y)$附近，拟合曲面是平行于Oxy的平面，由(5.2)有

$$c=\frac{\sum_{t=1}^{n}\omega_t f(x_t,\ y_t)}{n}.$$

看来，这个模型是粗糙的，但对于那些有峰值的曲面，却有良好的效果.

下面，介绍Shepard提出的有理函数逼近方法. 假定在Oxy平面上给定一组散乱点$(x_i,\ y_i)$及相应的函数值$f_i=f(x_i,\ y_i)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$. 令ρ是平面上某一度量，例如常常将它取成距离. 对于给定的点$(x,\ y)$，令$r_i=\rho((x,\ y),\ (x_i,\ y_i))$，例如$\rho=|x-x_i|+|y-y_i|$, $\rho=\max(|x-x_i|,\ |y-y_i|)$，或者$\rho=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$等等. 假定$\mu$是一个实数，满足$0<\mu<+\infty$. Shepard将拟合曲面$z=F(x,\ y)$表示成下面的插值公式

$$z=F(x,\ y)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{f_i}{r_i^{\mu}}\right)\Big/\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{1}{r_i^{\mu}}\right), & \text{当 } r_i\neq 0 \text{ 时,}\\ f_i, & \text{当 } r_i=0 \text{ 时.}\end{cases}\tag{5.4}$$

不难看出，这是一个关于$(x_i,\ y_i)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$的全局插值公式. 当$(x,\ y)$是非插值点时, $F(x,\ y)$取所有函数值f_i的权平均; 权因子$\dfrac{1}{r_i^{\mu}}$与$(x,\ y)$有关.

研究 Shepard 公式(5.4)的特性. 首先, (5.4)中$f(x_i, y_i)$的系数是

$$A_i(x,\ y)=\frac{1}{r_i^{\mu}\sum\limits_{l=1}^{N}\dfrac{1}{r_l^{\mu}}}=\frac{\prod\limits_{j=1,\,j\neq i}^{N}(r_j(x,\ y))^{\mu}}{\sum\limits_{k=1}^{N}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N}(r_l(x,\ y))^{\mu}},$$

$$\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

即(5.4)可写成

$$z=F(x,\ y)=\sum_{i=1}^{N}f(x_i,\ y_i)A_i(x,\ y),\tag{5.5}$$

其中, $A_i(x,\ y)$满足

$$A_i(x_j,\ y_j)=\delta_{ij},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

称(5.5)为 Shepard 公式(5.4)的 Lagrange 形式. 再则, Shepard 方法也可理解为带权因子$\omega_i=r_i^{\mu}$(与x, y有关)的最小二乘法, 即选择c使

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(c-f_i)^2=\min,$$

解得

$$c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(f_i/r_i^{\mu})}{\sum\limits_{i=1}^{N}(1/r_i^{\mu})},$$

即(5.4)式. 由(5.4)容易推得

$$\min_{1\leqslant i\leqslant N}f_i\leqslant F(x,\ y)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant N}f_i.\tag{5.6}$$

显然,当所有f_i=常数β时,拟合曲面为$z=F(x,y)\equiv\beta$. 即 Shepard 曲面对常数是再生的,权因子$\omega_i=r_i^{-\mu}$的μ一般选为大于1的常数. 但如果μ选得太大,则在点(x_i, y_i)附近拟合曲面将变得十分"平坦",而使点和点之间的那部分曲面变得十分陡. Gordon 等人曾指出,选取$\mu=2$是合适的.

Shepard 方法有一系列的缺点. 首先,如果N很大,为了计算一个型值点,需要耗费很大的工作量. 第二,权函数是由点的距离来决定,它完全不考虑到其它因素,例如点的方向等等. 最后,在型值点附近的平坦部分会有微小扰动. 如果我们能够估计(x_i, y_i)处函数$f(x, y)$的偏导数,即

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_i, y_i)=f_{x_i},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x_i, y_i)=f_{y_i},$$

那末,将拟合曲面$z=F(x, y)$表示成

$$\begin{aligned} z&=F(x, y)\\ &=\sum_{i=1}^{N}A_i(x, y)\left[f_i+(x-x_i)f_{x_i}+(y-y_i)f_{y_i}\right]. \end{aligned}\tag{5.7}$$

显然$F(x, y)$是满足下列条件的插值函数,即$F(x_i, y_i)=f(x_i, y_i)$, $\frac{\partial}{\partial x}F(x_i, y_i)=f_{x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y}F(x_i, y_i)=f_{y_i}$. 这意味着,当给出$f_i$, f_{x_i}, f_{y_i}时,拟合曲面$z=F(x, y)$能更合理地描述原来的曲面$z=f(x, y)$. 如果,f_{x_i}、f_{y_i}无法给出,则用二元函数差商将它近似地确定下来.

Shepard 本人于1964年提出了一个局部逼近方案,选定$R>0$并规定

$$\psi(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}, & 0<r\leqslant\dfrac{R}{3},\\ \dfrac{27}{4R}\left(\dfrac{r}{R}-1\right)^2, & \dfrac{R}{3}<r\leqslant R,\\ 0, & r>R.\end{cases}$$

这个函数是连续可微的，并当 $r>R$ 时恒为零. 这里 r_i 可取成 $\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$，并定义新的曲面

$$z=\varphi(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\psi(r_i))^\mu}{\sum\limits_{i=1}^{N}(\psi(r_i))^\mu}, & \text{当 } r_i\neq 0 \text{ 时;}\\ f_i, & \text{当 } r_i=0 \text{ 时.}\end{cases} \tag{5.8}$$

容易看出(5.8)在整个平面 Oxy 上有定义. 显然 $\varphi(x, y)$ 在 (x_i, y_i) 处等于 f_i，而在非型值点 (x, y) 处的值是部分函数值 f_i 的加权平均，即仅依赖于 $r_i<R$ 的那一部分的 (x_i, y_i) 所对应的函数值 f_i. 故公式(5.8)是一个局部逼近公式. 实际应用本方法时，需要合理选择 R，使有恰当数量的点 (x_i, y_i) 落在相应的圆域中.

在本节的末尾，介绍两个画曲面的等高线图方法.

记 $z=f(x, y)$ 为被逼近的曲面，$(x, y)\in\mathscr{D}$，对 $\mathscr{D}$ 作三角形剖分，如果 $f(x, y)$ 在每个三角形顶点上的值已知时，曲面 $z=f(x, y)$ 的等高线可这样画出：假定 h 是我们要的等高线的高度，记 $\triangle abc$ 为 T，则规定：

(i) 如果 $h<\min(f(a), f(b), f(c))$ 或如果 $h>\max(f(a), f(b), f(c))$ 则等高线不穿过 T;

(ii) 在相反情形，等高线与 T 的两个边相交，而且还可以确定哪两条边是相交的边并求出交点. 这时，h 落入 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 中，取其最小区间，例如 $h\in(f(a), f(b))$，那末等高线穿过 ab 的边，并且与 a 点的距离可通过线性插值方法求出：

$$\frac{h-f(a)}{f(b)-f(a)}|ab|,\ |ab| \text{代表 } a\text{、}b \text{ 间距离.}$$

等高线通过点的连接而成，但要对三角形及顶点排列好.

[11] [12] 中讨论了这个算法的 Fortran 程序.

另一个描绘等高线方法，仅借助简单的判断及计算机打印设备便可显示出来. 假定 H 是包含区域 $\mathscr{D}$ 的矩形网格，函数 $f(x, y)$ 在矩形网格上的值已给. 给定二个实数 HL、HU, $HL<HU$. c_{ij} 由整数表示，分为 0 至 9 共十档，它由下式所定义：

表 1　一张心电图的等高线

```
12222222333334444455555666677777888888888887777
22222222222233333444555566666777778888888888777
22111111111222223334455555666777778888888888888
22111111111122233444555666777788888889999999999
21111000001111223344555666777888889999999999999
21110000000011223344445566777888899999999999999
21110000000001122334455667778889999999999999999
21100000000000112233445566778889999999999999999
21100000000000112233445556677888999999999999999
21100000000001112233445555667788899999999999999
11100000000011122334455566677888899999999999999
11100000011111223344555667778888899999999999999
11111111111112233445556667778888899999999999999
11111111112222334445566667777888888888999888888
11111112222333344555666777788888888888888888888
22222222233333445556667778888888889999999999998
22222233333444555667777888888999999999999999999
22233333344444555667777888888899999999999999999
23333333444455555666777888888999999999999999999
33333344444455566667777888888999999999999999999
33333344444555556666777788888889999999999999999
23333344444555556666777777888888889999999999999
23333334444555556666777777888888889999999999999
22333344444555566666677777788888888888999999999
22333344444455555666666777777888888888899999999
22333333444455555566666677777778888888899999999
22233333444444555555666666777777888888889999999
22233333334444445555555666666777777888888999999
22233333334444445555555666666777777788888899999
22222333334444445555556666666677777778888888888899
22223333334444445555556666666677777778888888888899
```

$$c_{ij}=\begin{cases}0, & f(x_i, y_j)<HL;\\ 9, & f(x_i, y_j)>HU;\\ V, & HL+(V-1)h<f(t_{ij})<HL+Vh.\end{cases}\tag{5.9}$$

这里 $1\leqslant V\leqslant 8$, $h=\dfrac{HU-HL}{8}$. 表1取自[4], 当医生对诊者作心电图并得到一批数据后, 如何去作等高线的分析. Schumaker 在另一篇文章里用二步逼近法(参见§7)去处理这张心电图.

§6 散乱数据拟合的最小二乘法

在本节, 针对散乱数据的情况, 利用双三次样条函数去构作拟合曲面. 假定被逼近的曲面 $z=f(x, y)$, 它在点 (x_r, y_r) 处的函数 $f(x, y)$ 值 f_r 已给, $r=1, 2, \cdots, l$. 点集散乱地分布在 Oxy 平面上的一个矩形 $R=[a, b]\times[c, d]$ 中, 将矩形作扩大分划

$$\lambda_1<\cdots<\lambda_4=a<\lambda_5<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n+1}=b<\cdots<\lambda_{n+4};$$

$$\mu_1<\cdots<\mu_4=c<\mu_5<\cdots<\mu_m<\mu_{m+1}=d<\cdots<\mu_{m+4}.$$

点 (λ_i, μ_j) 称为矩形网格点, R 被分成 R_{ij} 个小矩形, $i=4, \cdots, n$, $j=4, \cdots, m$. 对于每个双三次样条 $s(x, y)$, 它在每个小矩形 R_{ij} 上呈现为双三次多项式

$$\sum_{s=0}^{3}\sum_{t=0}^{3}\alpha_{st}x^s y^t,$$

$s(x)$ 有连续的偏导数 $\dfrac{\partial^{p+q}s(x, y)}{\partial x^p\partial y^q}$, $0\leqslant p\leqslant 2$, $0\leqslant q\leqslant 2$. 由第1章§2的记号, $s(x)$ 被表为

$$s(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}B_{i,4}(x)B_{j,4}(y).\tag{6.1}$$

其中，函数 $B_{i,4}(x)B_{j,4}(y)$ 仅在 4×4 个矩形上非零(图 1)，换言之，在 $R_{\mu\nu}=\{(x, y)\mid x_\mu\leqslant x\leqslant x_{\mu+1},\ y_\nu\leqslant y\leqslant y_{\nu+1}\}$ 上仅有 $B_i(x)B_j(y)$ 个非零双三次 B 样条，这里 $\mu-3\leqslant i\leqslant\mu$, $\nu-3\leqslant j\leqslant\nu$.

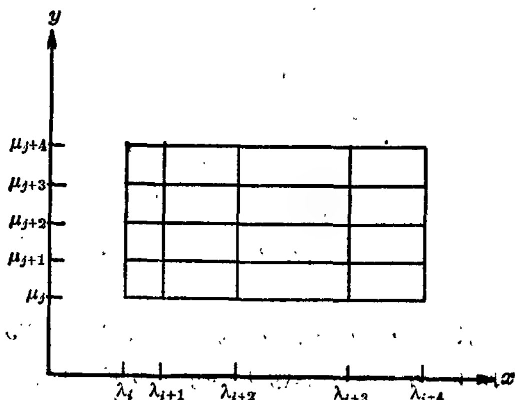


图 1

由(6.1)和观察数据 (x_r, y_r, f_r), $r=1, 2, \cdots, l$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}B_{i,4}(x_r)B_{j,4}(y_r)=f_r,\quad r=1, 2, \cdots, l. \qquad (6.2)$$

将它写成矩阵形式

$$AX=b, \qquad (6.3)$$

其中 A 是 l 行 $n\times m$ 列矩阵，其 r 行、$(j-1)m+i$ 列的元素为 $B_{i,4}(x_r)B_{j,4}(y_r)$，而

$$X=\begin{pmatrix} r_{11}\\ \vdots\\ r_{n1}\\ \vdots\\ r_{1m}\\ \vdots\\ r_{nm}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_l\end{pmatrix}.$$

不妨假定散乱点集(x_r, y_r), $r=1, 2, \cdots, l$ 的排列是按它们在矩形 $R_{4,4}\cdots R_{n,4}; \cdots; R_{4,m}\cdots; R_{n,m}$ 中的位置为先后次序，则有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & & & & \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & & & \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & & \\ & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ & & & & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & A_{m,m+3} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

其中，A_{rs} 是一个长方形带状矩阵，带宽为 4，其列数为 n，而行数等于通过方格 $R_{4,r+3}$, $R_{5,r+3}$, $\cdots$, $R_{n,r+3}$ 的观测点数目之和.

例如取 $n=5$, $m=6$, $(x_r, y_r)r=1, 2, \cdots, 39$ 的分布如图 2 所示，记 $B_{i,4}(x_r)B_{j,4}(y_r)=b_{ij}^{(r)}$，那末，$A$ 能写成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & & \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \end{pmatrix}.$$

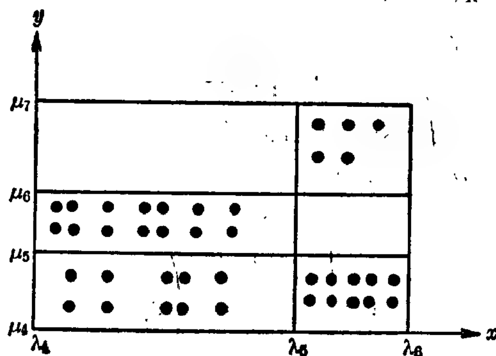


图 2

其中

$$A_{1j}=\begin{pmatrix} b_{1j}^{(1)} & b_{2j}^{(1)} & b_{3j}^{(1)} & b_{4j}^{(1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1j}^{(10)} & b_{2j}^{(10)} & b_{3j}^{(10)} & b_{4j}^{(10)} & 0 \\ 0 & b_{2j}^{(11)} & b_{3j}^{(11)} & b_{4j}^{(11)} & b_{5j}^{(11)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{2j}^{(20)} & b_{3j}^{(20)} & b_{4j}^{(20)} & b_{5j}^{(20)} \end{pmatrix},$$

$$A_{2j}=\begin{pmatrix} b_{1j}^{(21)} & b_{2j}^{(21)} & b_{3j}^{(21)} & b_{4j}^{(21)} & 0 \\ b_{1j}^{(22)} & b_{2j}^{(22)} & b_{3j}^{(22)} & b_{4j}^{(22)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1j}^{(34)} & b_{2j}^{(34)} & b_{3j}^{(34)} & b_{4j}^{(34)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{3j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{3j}^{(35)} & b_{4j}^{(35)} & b_{5j}^{(35)} \\ 0 & 0 & b_{3j}^{(36)} & b_{4j}^{(36)} & b_{5j}^{(36)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b_{3j}^{(39)} & b_{4j}^{(39)} & b_{5j}^{(39)} \end{pmatrix}.$$

$b_{ij}^{(r)}$ 由第1章的§2给出．现在，假定 $l\gg n\times m$，利用最小二乘法来解(6.3)．即在 $N=n\times m$ 欧氏空间中求一向量 X 使

$$\|AX-f\|_2^2=\min. \tag{6.5}$$

容易证明，(6.5)的解总是存在的．这个解是唯一的，当且仅当 $\mathrm{null}(A)=0$．对于散乱数据来说，在矩阵 A 中常常有一个行出现为零，因而，利用奇异值分解法来解(6.4)是合适的．

设 $A=(a_{ij})_{l\times N}$，$N=n\times m$，由文献[14]存在着酉矩阵 U、V 使

$$V^TAU=\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

其中 $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_k)$，且 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_k>0$．数 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n$（其中 $\sigma_{k+1}=\cdots=\sigma_n=0$）称为 A 的奇异值．U 的列向量称为 A 的右奇异向量，V 的列向量称为 A 的左奇异

向量. 可以证明,(6.5)的解可写成

$$X=U\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^Tf. \tag{6.7}$$

而且, 如果 $\|b-AX'\|_2^2$ 是极小值并且 $X'\neq X$, 那末 $\|X\|_2\leqslant\|X'\|_2$. 记

$$U=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_N),\ \ V=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_l).$$

则 $AX=b$ 的最小二乘解为

$$\left.\begin{aligned}&\delta_i=\sigma_i^{-1}v_i^Tb,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\\&X=\delta_1u_1+\delta_2u_2+\cdots+\delta_ku_k.\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

关于寻求奇异值的方法参见[14].

§7 二步逼近法

为了构作散乱数据的合适逼近曲面而不需要太多的计算量, L. L. Schumaker 于1976年提出了曲面拟合的二步逼近法. 第一步, 针对散乱数据提出局部修补逼近; 第二步, 直接用 B 样条去构作局部样条逼近曲面.

7-1 局部修补方法

假定 $\mathscr{D}$ 是 Oxy 平面上的一个区域, $f(x,\ y)$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上的实函数, 给定属于 $\mathscr{D}$ 的一个点集 $(x_i,\ y_i)$, $i=1,\ 2,\cdots,\ N$ 和相应的函数值 $f_i=f(x_i,\ y_i)$. 要求在 $\mathscr{D}$ 上寻找一个函数 $F(x,\ y)$ 去合理地逼近函数 $f(x,\ y)$. 首先, 我们寻找一个矩形域

$$H=[a,\ b]\times[c,\ d],\ H\supseteq\mathscr{D}.$$

对 H 作 x、y 方向分划

$$\left.\begin{aligned}&a=x_0<x_1<\cdots<x_{k+1}=b,\\&c=y_0<y_1<\cdots<y_{l+1}=d,\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

这些分划使得 H 变成若干个小矩形

$$H=\bigcup_{i=0}^{k}\bigcup_{j=0}^{l}H_{ij},\quad H_{ij}=[x_i,\ x_{i+1}]\times[y_j,\ y_{j+1}].$$

我们希望，在每一 H_{ij} 上找出一个"修补"曲面

$$g(x,\ y)=\left\{g_{ij}(x,\ y)\,|\,(x,\ y)\in H_{ij},\quad \begin{matrix} i=0,\ 1,\ \cdots,\ k, \\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ l, \end{matrix}\right\},$$

这里 $g_{i,j}(x,\ y)$ 是次数较低的多项式，为了明确起见，假设 $g_{ij}\in\mathscr{P}=\mathrm{Span}\,\{\phi_1(x,\ y),\ \cdots,\ \phi_d(x,\ y)\}$，一般讲，取 $d=3$ 或 $d=6$，其中 $\phi_1(x,\ y)=1$，$\phi_2(x,\ y)=x$，$\phi_3(x,\ y)=y$，$\phi_4(x,\ y)=x^2$，$\phi_5(x,\ y)=xy$，$\phi_6(x,\ y)=y^2$. 即

$$g_{ij}(x,\ y)=\sum_{\nu=1}^{d}c_{ij\nu}\,\phi_\nu(x,\ y).$$

由于 $g_{ij}(x,\ y)$ 仅代表在 H_{ij} 上的曲面块，因而，当考虑合理确定常数 $c_{ij\nu}$ 时，自然地会想到仅利用 H_{ij} 中的数据 $(x_r,\ y_r,\ f_r)$. 但是，在散乱数据的情况下，甚至对许多 H_{ij} 来说，在它里面很少甚至没有数据点. 在这种情况下，必须考虑较大的包含 H_{ij} 的矩形域 $\hat{H}_{ij}$，在 $\hat{H}_{ij}$ 中有适当多的点. $\hat{H}_{ij}$ 能够用下面方法决定.

假定构造 $g_{ij}(x,\ y)$ 至少需要 $d_{\min}$ 个数据，对于每个集合 $A\subset H$，记 $d(A)$ 是 A 中的数据数目. 确定 $\hat{H}_{ij}$ 的迭代过程如下：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & \text{置 } \hat{H}_{ij}=H_{ij}, \\ \text{(b)} & \text{若 } d(\hat{H}_{ij})\geqslant d_{\min} \text{ 时停止，否则转入(c)}, \\ \text{(c)} & \hat{H}_{ij} \text{ 被 } H_{ij} \text{ 的扩大了的集合代替并转入} \\ & \text{(b)步.}\end{array}\right\}\qquad(7.2)$$

为了运用 $\hat{H}_{ij}$ 的数据点 $(x_r,\ y_r,\ f_r)$ 来确定系数向量 $\{c_{ij\nu}\}_1^d$. 当 $d_{\min}\geqslant d$ 时采用离散的最小二乘法或离散的契贝谢夫逼近

方法，当采用离散最小二乘法时，归结为解 d 个联立方程的正规方程组，由于 d 不大，方程组将不是病态的．如果是离散契贝谢夫逼近，为了确定 $\{c_{ij\nu}\}_1^d$，必须解一个线性规划问题．如果 H_{ij} 中的数据不多（例如 3～6 个）则可运用插值法来确定 H_{ij} 上的小片曲面，这一过程说明如下．

若在区域 H_{ij} 上给定 $n+1$ 个插值点 $(x_i, y_i)\, i=0,1,\cdots,n$. 假定 $f(x, y)$ 在 (x_i, y_i) 上的值已知，记之为 f_i．现在，我们来建立 H_{ij} 中的小片插值曲面：

$$
\begin{aligned}
z &= g_{ij}(x, y) \\
&= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\
&\quad + \cdots + a_{m0}x^m + a_{m-11}x^{m-1}y + \cdots + a_{0m}y^m, \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

这里 a_{ij} 是待定参数，共有 $\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$ 个．不妨假定插值条件恰好等于参数个数．在(7.3)中令 $g_{ij}(x_i, y_i)=f_i$，便得到 $n+1$ 个方程组．以 $n=2, 5$ 为例，若

$$
\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (n=2),
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\
1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\
1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\
1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\
1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\
1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2
\end{vmatrix} \neq 0 \quad (n=5), \qquad (7.4)
$$

那末插值问题(7.3)的解存在且唯一．当 $n=2$ 时(7.4)成立的几何意义是插值点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 不在同一直线上．当 $n=5$ 时，(7.4)成立的几何意义是插值点 (x_0, y_0)、

(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)、(x_4, y_4)、(x_5, y_5)不在同一条二次曲线上。下面，寻找插值函数的 Lagrange 基函数．先以 $n=2$ 为例，将曲面 $z=F(x, y)$写成

$$z=f_0l_0(x, y)+f_1l_1(x, y)+f_2l_2(x, y), \qquad (7.5)$$

其中 $l_i(x, y)$是关于 x、y 的一次式且满足

$$l_i(x_j, x_j)=\delta_{i,j}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ 1, & i=j,\end{cases} \quad i, j=0, 1, 2.$$

为求 $l_i(x, y)$引入平面向量

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{tk}&=(x_t-x_k, y_t-y_k),\\ \boldsymbol{r}^*_{tk}&=(y_t-y_k, -(x_t-x_k)),\\ \boldsymbol{r}_k&=(x-x_k, y-y_k).\end{aligned}\right\}$$

容易验证 $\qquad (\boldsymbol{r}_{tk}, \boldsymbol{r}^*_{tk})=0, (\boldsymbol{r}_{tk}, \boldsymbol{r}^*_{kt})=0.$

考察内积$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}^*_{12})$，它是关于 x, y 的线性一次式，当$(x, y)=(x_1, y_1)$时$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}^*_{12})=0$; 当$(x, y)=(x_2, y_2)$时有$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}^*_{12})=0$; 而当$(x, y)=(x_0, y_0)$时$(r_1, \boldsymbol{r}^*_{12})\neq 0$. 从而，得到第一个基函数

$$l_0(x, y)=\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}^*_{12})}{(\boldsymbol{r}_{01}, \boldsymbol{r}^*_{12})},$$

同理，$l_1(x, y)=\dfrac{(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}^*_{20})}{(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}^*_{20})}$, $l_2(x, y)=\dfrac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}^*_{01})}{(\boldsymbol{r}_{20}, \boldsymbol{r}^*_{01})}$.

类似地，当 $n=5$ 时，曲面方程可表为

$$z=g_{ij}(x, y)=\sum_{i=0}^{5}f_il_i(x, y). \qquad (7.6)$$

其中

$$l_0(x, y)=\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}^*_{12})(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}^*_{34}) & (\boldsymbol{r}_{51}, \boldsymbol{r}^*_{12})(\boldsymbol{r}_{53}, \boldsymbol{r}^*_{34})\\ (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}^*_{13})(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}^*_{24}) & (\boldsymbol{r}_{51}, \boldsymbol{r}^*_{13})(\boldsymbol{r}_{52}, \boldsymbol{r}^*_{24})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_{01}, \boldsymbol{r}^*_{12})(\boldsymbol{r}_{03}, \boldsymbol{r}^*_{34}) & (\boldsymbol{r}_{51}, \boldsymbol{r}^*_{12})(\boldsymbol{r}_{53}, \boldsymbol{r}^*_{34})\\ (\boldsymbol{r}_{01}, \boldsymbol{r}^*_{13})(\boldsymbol{r}_{02}, \boldsymbol{r}^*_{24}) & (\boldsymbol{r}_{51}, \boldsymbol{r}^*_{13})(\boldsymbol{r}_{52}, \boldsymbol{r}^*_{24})\end{vmatrix}};$$

$$l_1(x, y)=\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_{23}^*)(\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_{45}^*) & (\boldsymbol{r}_{02}, \boldsymbol{r}_{23}^*)(\boldsymbol{r}_{04}, \boldsymbol{r}_{45}^*)\\ (\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_{24}^*)(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_{35}^*) & (\boldsymbol{r}_{02}, \boldsymbol{r}_{24}^*)(\boldsymbol{r}_{03}, \boldsymbol{r}_{35}^*)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{23}^*)(\boldsymbol{r}_{14}, \boldsymbol{r}_{45}^*) & (\boldsymbol{r}_{02}, \boldsymbol{r}_{23}^*)(\boldsymbol{r}_{04}, \boldsymbol{r}_{45}^*)\\ (\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{24}^*)(\boldsymbol{r}_{13}, \boldsymbol{r}_{35}^*) & (\boldsymbol{r}_{02}, \boldsymbol{r}_{24}^*)(\boldsymbol{r}_{03}, \boldsymbol{r}_{35}^*)\end{vmatrix}};$$

$$l_2(x, y)=\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_{34}^*)(\boldsymbol{r}_5, \boldsymbol{r}_{50}^*) & (\boldsymbol{r}_{13}, \boldsymbol{r}_{34}^*)(\boldsymbol{r}_{15}, \boldsymbol{r}_{50}^*)\\ (\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_{35}^*)(\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_{40}^*) & (\boldsymbol{r}_{13}, \boldsymbol{r}_{35}^*)(\boldsymbol{r}_{14}, \boldsymbol{r}_{40}^*)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_{23}, \boldsymbol{r}_{34}^*)(\boldsymbol{r}_{25}, \boldsymbol{r}_{50}^*) & (\boldsymbol{r}_{13}, \boldsymbol{r}_{34}^*)(\boldsymbol{r}_{15}, \boldsymbol{r}_{50}^*)\\ (\boldsymbol{r}_{23}, \boldsymbol{r}_{35}^*)(\boldsymbol{r}_{24}, \boldsymbol{r}_{40}^*) & (\boldsymbol{r}_{13}, \boldsymbol{r}_{35}^*)(\boldsymbol{r}_{14}, \boldsymbol{r}_{40}^*)\end{vmatrix}};$$

$$l_3(x, y)=\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_{45}^*)(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_{01}^*) & (\boldsymbol{r}_{24}, \boldsymbol{r}_{45}^*)(\boldsymbol{r}_{20}, \boldsymbol{r}_{01}^*)\\ (\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_{40}^*)(\boldsymbol{r}_5, \boldsymbol{r}_{51}^*) & (\boldsymbol{r}_{24}, \boldsymbol{r}_{40}^*)(\boldsymbol{r}_{25}, \boldsymbol{r}_{51}^*)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_{34}, \boldsymbol{r}_{45}^*)(\boldsymbol{r}_{30}, \boldsymbol{r}_{01}^*) & (\boldsymbol{r}_{24}, \boldsymbol{r}_{45}^*)(\boldsymbol{r}_{20}, \boldsymbol{r}_{01}^*)\\ (\boldsymbol{r}_{34}, \boldsymbol{r}_{45}^*)(\boldsymbol{r}_{30}, \boldsymbol{r}_{01}^*) & (\boldsymbol{r}_{24}, \boldsymbol{r}_{45}^*)(\boldsymbol{r}_{20}, \boldsymbol{r}_{01}^*)\end{vmatrix}};$$

$$l_4(x, y)=\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_5, \boldsymbol{r}_{50}^*)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_{12}^*) & (\boldsymbol{r}_{35}, \boldsymbol{r}_{50}^*)(\boldsymbol{r}_{31}, \boldsymbol{r}_{12}^*)\\ (\boldsymbol{r}_5, \boldsymbol{r}_{51}^*)(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_{02}^*) & (\boldsymbol{r}_{35}, \boldsymbol{r}_{51}^*)(\boldsymbol{r}_{30}, \boldsymbol{r}_{02}^*)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_{45}, \boldsymbol{r}_{50}^*)(\boldsymbol{r}_{41}, \boldsymbol{r}_{12}^*) & (\boldsymbol{r}_{35}, \boldsymbol{r}_{50}^*)(\boldsymbol{r}_{31}, \boldsymbol{r}_{12}^*)\\ (\boldsymbol{r}_{45}, \boldsymbol{r}_{51}^*)(\boldsymbol{r}_{40}, \boldsymbol{r}_{02}^*) & (\boldsymbol{r}_{35}, \boldsymbol{r}_{51}^*)(\boldsymbol{r}_{30}, \boldsymbol{r}_{02}^*)\end{vmatrix}};$$

$$l_5(x, y)=\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_{01}^*)(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_{23}^*) & (\boldsymbol{r}_{40}, \boldsymbol{r}_{01}^*)(\boldsymbol{r}_{42}, \boldsymbol{r}_{23}^*)\\ (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_{02}^*)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_{13}^*) & (\boldsymbol{r}_{40}, \boldsymbol{r}_{01}^*)(\boldsymbol{r}_{41}, \boldsymbol{r}_{13}^*)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_{50}, \boldsymbol{r}_{01}^*)(\boldsymbol{r}_{52}, \boldsymbol{r}_{23}^*) & (\boldsymbol{r}_{40}, \boldsymbol{r}_{01}^*)(\boldsymbol{r}_{42}, \boldsymbol{r}_{23}^*)\\ (\boldsymbol{r}_{50}, \boldsymbol{r}_{02}^*)(\boldsymbol{r}_{51}, \boldsymbol{r}_{13}^*) & (\boldsymbol{r}_{40}, \boldsymbol{r}_{02}^*)(\boldsymbol{r}_{41}, \boldsymbol{r}_{13}^*)\end{vmatrix}}.$$

从这里看出，当数据散乱时，构作曲面是不容易的．采用曲面片 g_{ij} 来逼近曲面 $f(x, y)$，其优点是计算量小．但这些曲面片在分划线上会产生跳跃，这对于某些应用问题来说是不合理的．我们将在第一步的基础上建立一个光滑曲面．

7-2 光滑曲面的建立

在 7-1，我们在每一个矩形 H_{ij} 上建立了曲面片，也即是说，拟合曲面在 $R=[a, b]\times[c, d]$ 上的每一点的值都已给出．为了克服在 H_{ij} 的边界上，曲面片不连续造成的计算的

困难，我们将 $R=[a, b]\times[c, d]$ 重新作分划，使得新的网点都不落在 H_{ij} 的边界上. 这样，拟合曲面在 R 上的每一个点都有确定的函数值. 在这个基础上，我们能利用规则区域构作曲面的方法来建立光滑的拟合曲面，例如乘积型磨光曲面，乘积型插值曲面，乘积型最小二乘曲面等等. Schumaker 于 1976 年提出了构作光滑曲面的拟插值法. 为此先叙述一个引理. 对于 $[a, b]$ 的一个扩大分划

$$x_1<\cdots<x_k=a<x_{k+1}<\cdots<x_{n+1}=b\leqslant\cdots\leqslant x_{n+k},$$
$$y_1<\cdots<y_l=c<y_{l+1}<\cdots<y_{m+1}=d\leqslant\cdots\leqslant y_{m+l}.$$

由第 1 章 §1 知，记乘积型基底

$$\{B_{i,k}(x)B_{j,l}(y)\}_{i=1,}^{n}{}_{j=1}^{m}$$

构作光滑曲面

$$z=QF=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}FB_{i,k}(x)B_{j,l}(x), \tag{7.7}$$

这里 $z=F(x, y)$ 是由第一步(即局部修补方法)所产生的曲面. λ_{ij} 是关于 F 的线性泛函

$$\lambda_{ij}F=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_{i\nu}\beta_{j\mu}F(\sigma_{i\nu}, \tau_{j\mu}), \tag{7.8}$$

其中 $\sigma_{i\nu}$, $\tau_{j\mu}$ 满足

$$\left.\begin{aligned}x_i<\sigma_{i1}<\cdots<\sigma_{ip}<x_{i+k},\\ y_j<\tau_{j1}<\cdots<\tau_{jq}<y_{j+l},\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

选择 $\alpha_{i\nu}$, $\beta_{j\mu}$ 使 Q 对函数类

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}d_{ij}x^{i-1}y^{j-1}, \tag{7.10}$$

有再生性，它归为一组代数方程的解(参见文献[7]). 这里，我们指出，为了构造高精度的光滑曲面，可用本书第 3 章 §3 所得到的高精度样条曲线去构作乘积型逼近曲面.

参 考 文 献

第1章

[1] 李岳生、齐东旭,样条函数方法,科学出版社, 1979.

[2] Carl de Boor, Splines as linear Combinations of B-Spline, in Approximation Theory II (主编 G. G. Lorentz 等), 1976.

[3] Л. A. 刘斯铁尔尼克、B. И. 索波列夫, 泛函数分析概要, 杨从仁译, 科学出版社, 1964.

[4] G. W. 斯特尔特,矩阵计算引论,王国荣等译,上海科学技术出版社,1980.

第2章

[1] Laurent, P. J., Approximation et Optimisation, 1975.

[2] Laurent, P. J. and P. M. Auselone, A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions, Num. Math. 12 (1968).

[3] M. 阿佛里耳,非线性规划,李元熹等译,上海科学技术出版社, 1980.

[4] M. G. Cox, A Survey of Numerical Methods for Data and Function Approximation, in "The State of the Art in Numerical Analysis" Ed. D. Jacobs, 1977.

[5] M. G. Cox, Curve fitting with piecewise polynomials, J. Inst. Maths. Applics, 8, 36~52 (1971).

[6] J. G. Hayes, Algorithms for curve and surface fitting, in "Software for Numerical Mathematics" Ed. D. J. Evans, 1974.

[7] J. M. Chambers, Computational Methods for Data Analysis, 1977.

[8] C. de Boor, A Practical Guide to Splines, 1978.

[9] C. de Boor, Good approximation by splines with variable knots, in "Splines Functions and Approximation Theory" A. Meir and A. Sharma eds, 1973.

[10] Barrodale, I 等, An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation, SIAM. J. Numer. Anal., 10, 1973.

[11] M. G. Cox, A data fitting package for the non-specialist user, in "Software for Numerical Mathematics" Ed. D. J. Evans, 1974.

[12] Gentleman, W. M., An error analysis of Goertzl's (Watt's) method

for computing Fourier coefficients, Comput. J. 12 (1969).

[13] Scraton, R. E., A method for improving the Convergence of Chebyshev series, Comput. J. 13 (1970).

[14] Golub, G. H. and Pereyra, V., The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables solutions, Num. Anal., 10, 1973.

[15] Krogh, F. T., Efficient implementation of a variable projection algorithin for nonlinear least-squares problems, Commum. ACM 17, 1974.

第3章

[1] Carl de Boor, A practical Guide to splines, Vol. 27.

[2] 苏步青、刘鼎元，计算几何，上海科学技术出版社，1981.

[3] 李岳生、齐东旭，样条函数方法，科学出版社，1979.

[4] 黄友谦，磨光样条的若干注记，高等学校计算数学学报，1978.2.

[5] 陈大正，三次曲线曲面的一种构造法，中山大学学报自然科学版，1981，第1期.

[6] Lyche, T., Local Spline-Approximation Methods and Osculatory Interpolation Formulae, Lecture Notes in Mathematics, 556.

[7] Marsden, M., An identity for spline function with application to variation diminishing spline approximation, J. Approx. Theory 3, 1970, 7～49.

[8] Lyche, T., Local Spline Approximation Methods and Osculatory Interpolation Formulae, Approximation Theory 1976.

[9] Lyche, T. and L. L. Schumaker, Local spline approximation methods, J. Approx. Theory 15 (1975) 294～325.

[10] Anselone, P. M., Laurent, P. J., A general method for the Construction of interpolating or smoothing Spline-functions, Num. Math. 12, 1968, 68～82.

[11] Munteanu, M. J., Generalized Smoothing Spline functions for operators, SIAM. J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 1 March 1972.

[12] H. Akima, A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, J. ACM 17 (1970).

第4章

[1] P. J. Davis, Interpolation and Approximation, 1963.

[2] Eli. Passow, Monotone and convex spline interpolation, SIAM. J.

Numer. Anal. 14, 1977.

[3] C. A. Micchelli, Eli. Passow, and J. A. Roulier, Algorithms for Computing Shape preserving Spline interpolations to data, Math. Comp. 7, 1977.

[4] Eli. Passow, Monotone quadratic Spline interpolation, Approx. Theory. 19, 1977.

第5章

[1] de Boor, C., Bicubic spline interpolation, J. Maths. and Phys. 41, 1967.

[2] Clenshaw, C., W. and Hayes, J. G. Curve and Surface fitting, J. Int Maths. Applics. 1. 1965.

[3] Greville, T. N. E., Note on fitting of functions of several independent variables, J. Soc. Indust. Appl. Math., 9, 1961.

[4] Schumaker, L. L. Fitting surfaces to scattered data, in "Approximation Theory II" G. G. Lorentz, C. K. Chui, and L. L. Schumaker eds, 1976.

[5] M. J. D. Powell, Numerical methods for fitting functions of two variables, in "The State of the Art in Numerial Analysis" D. Jacobs ed, 1977.

[6] Robert E. Barnhill, Representation and approximation of surfaces, in "Mathematical Software III" John R. Rice ed, 1977.

[7] Schumaker, L. L., Two-Stage spline methods for fitting surfaces, in "Approximation Theory" A. Dold and B. Eckmann eds, 1976.

[8] Weinstein, S. E., Approximations of functions of several variables: product chebyshev approximations I, J. Approx. Theory, 1969 (2).

[9] Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P., Functional Analysis in Normed Spaces, Pergamon Press. Oxford, 1964.

[10] Lodwick, G. D. and Whittle, J., A technique for automatic contouring field survey data, Australian Computer Journal, 1970, 2.

[11] Vitushkin, A. G., Theory of the Transmission and Processing of Information, Pergamon Press. New York, 1961.

[12] Heap, B. R., Algorithms for the Production of contour maps over an irregular triangular mesh, NPL Rpt. IAC 10, 1972.

[13] Heap, B. R., Two FORTRAN Contouring routines, NPL NAC 47, 1974.

[14] G. W. 斯图尔特，矩阵计算引论，王国荣等译，上海科学技术出版社，1980

[General Information]

□□=□□□□□□□□□□□□

□□=□□□

□□=188

SS□=10179716

DX□=

□□□□=1984□09□□1□

□□□=□□□□□□□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]